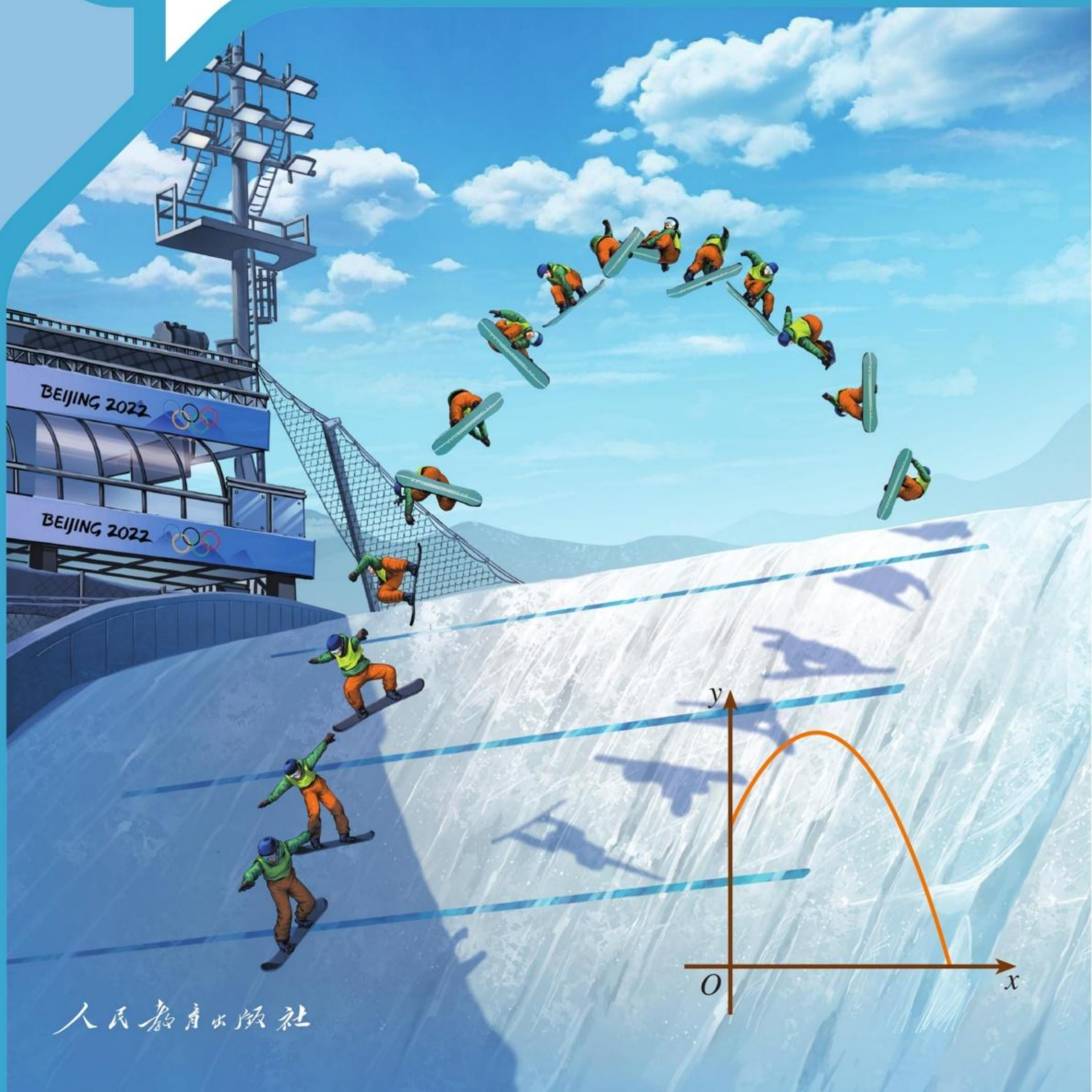




义务教育教科书

数学

九年级
上册



人民教育出版社

人民教育出版社

义务教育教科书

数 学

九年级 上册

人民教育出版社 课程教材研究所 编著

人民教育出版社
· 北京 ·

仅供个人学习使用，未经授权不得另做他用

顾问：林 群 田 刚

主 编：王长平

执行主编：李海东

分册主编：王 嵘

编写人员（以姓氏笔画为序）：

王飞兵 王凯歌 刘金英 李龙才

张飞玲 张劲松 张艳娇 陈清华

责任编辑：李 健

责任设计：王俊宏

责任校对：李嘉楠

责任印制：

义务教育教科书 数学 九年级 上册

人民教育出版社 课程教材研究所 编著

出 版 人民教育出版社

（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编：100081）

网 址 <http://www.pep.com.cn>

版权所有·侵权必究

仅供个人学习使用，未经授权不得另做他用

致同学

亲爱的同学，九年级的数学学习开始了。在本学期，我们将要学习哪些内容？快来了解一下吧。

对于现实生活和数学中的很多问题，方程是一种解决它们的有效的数学工具。在方程大家庭中，一元二次方程是其中的重要成员。在“**一元二次方程**”中，与一元一次方程内容的学习类似，你将学习一元二次方程的概念、解法，并运用它解决一些实际问题，提升运算能力，增强模型观念。

函数是刻画现实世界中的变量关系和变化规律的重要工具。我们已经学习了一次函数，知道可以用它来刻画均匀变化。在“**二次函数**”和“**反比例函数**”中，你将进一步学习两种基本的函数，学习它们的概念、图象和性质，运用它们描述某些变化规律、解决一些实际问题，进一步提高对函数的认识，增强模型观念和应用意识。

与平移、轴对称一样，旋转也是一种基本的图形变化。在“**旋转**”中，你将类比平移、轴对称的学习，学习旋转的概念、性质和应用，进一步认识中心对称这种特殊的旋转。运用旋转，再结合平移、轴对称，你能设计出更加丰富多彩的图案。

圆是一种曲线图形，也是一种基本的几何图形。在“**圆**”中，你将在小学的基础上进一步认识圆、探索圆的性质，并运用这些知识去解决一些实际问题。在“**直线与圆的位置关系**”中，你还将学习直线与圆这两种基本几何图形之间的位置关系，并进一步认识三角形与圆、正多边形与圆之间的关系。通过学习这些内容，你将进一步提高解决图形问题的能力，增强几何直观，提升推理能力。

此外，综合与实践“**高铁列车运行中的数量关系**”将带你从函数的视角去了解风驰电掣的高铁列车；“**生活中的优化问题**”需要你综合运用数学知识去解决生活中广泛存在的最值问题，感受数学的应用价值。

数学伴随着我们成长，数学伴随着我们进步，数学伴随着我们成功。让我们扬帆起航，开启一段新的数学之旅吧！

目 录

第二十五章 一元二次方程 1



25.1 一元二次方程的概念 2

25.2 降次——解一元二次方程 5

阅读与思考 一元二次方程与黄金分割数 18

25.3 实际问题与一元二次方程 20

数学活动 25

小结 26

第二十六章 二次函数 29



26.1 二次函数的概念 30

26.2 二次函数的图象和性质 33

26.3 二次函数与一元二次方程 46

26.4 实际问题与二次函数 51

阅读与思考 生活中的抛物线 56

数学活动 58

小结 59



第二十七章 反比例函数 63

27.1 反比例函数的概念 64

27.2 反比例函数的图象和性质 67

27.3 实际问题与反比例函数 74

阅读与思考 生活中的反比例函数 82

数学活动 83

小结 84

综合与实践 高铁列车运行中的数量关系 87

第二十八章 旋转 91



28.1 图形的旋转 92

阅读与思考 全等变换 97

28.2 中心对称 99

阅读与思考 旋转对称图形 106

信息技术应用 探索反比例函数图象的对称性 107

数学活动 108

小结 109

第二十九章 圆 113



29.1 圆的有关概念 114

探究与发现 等宽曲线 121

29.2 圆的有关性质 123

29.3 弧长和扇形面积 134

数学活动 140

小结 142

第三十章 直线与圆的位置关系 147



30.1 直线与圆 148

探究与发现 圆与圆的位置关系 156

30.2 三角形的内切圆 158

30.3 正多边形与圆 161

图说数学史 圆周率的计算 166

数学活动 168

小结 169

综合与实践 生活中的优化问题 173

第二十五章 一元二次方程

方程是现实问题中含有未知数的等量关系的数学表达. 我们已经学习过利用一元一次方程解决现实生活中具有等量关系的问题, 下面再来考虑一个更为复杂的问题.

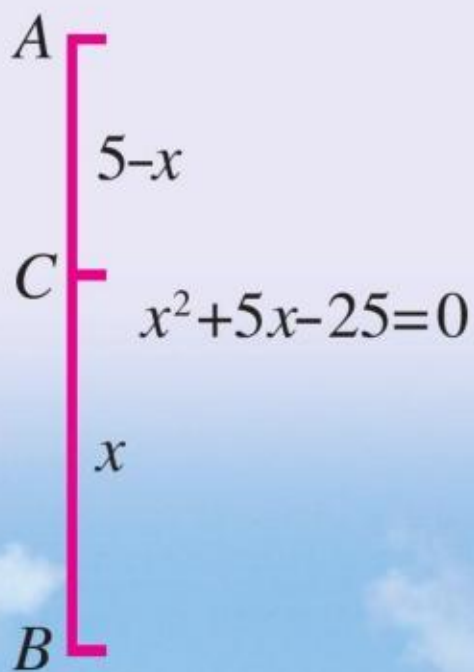
在设计人体雕像时, 使雕像的腰部以上与腰部以下的身长比, 等于腰部以下与全身的身长比, 可以增加视觉美感. 如果某人体雕像全身长为 5 m, 按照上述比例, 雕像腰部以下为多长?

雕像腰部以上的身长 AC 与腰部以下的身长 BC 满足如下等量关系:

$$AC : BC = BC : 5, \text{ 即 } BC^2 = 5AC.$$

设雕像腰部以下的身长 BC 为 x m, 根据上述等量关系, 就可以列出方程 $x^2 = 5(5-x)$, 整理得 $x^2 + 5x - 25 = 0$. 解这个方程就可以得出雕像腰部以下的身长.

与一元一次方程相比较, 上述方程也只含有一个未知数, 但未知数的最高次数是 2, 这样的方程就是本章要学习的一元二次方程. 在本章中, 我们将探究一元二次方程的解法、根与系数的关系, 并运用一元二次方程解决一些实际问题, 增强模型观念. 学习本章后, 你对方程的认识将会得到进一步提升.



25.1 一元二次方程的概念

章引言中的方程

$$x^2 + 5x - 25 = 0 \quad ①$$

只含有一个未知数 x ， x 的最高次数是 2. 像这样的方程有丰富的背景、广泛的应用，可以帮助我们解决很多实际问题. 看如下一些问题.

问题 1 如图 25.1-1，有一块矩形铁皮，长 100 cm，宽 50 cm. 在它的四角各切去一个同样大小的正方形铁皮，然后将四周凸出部分折起，就能制作一个无盖方盒（图 25.1-2）. 如果要制作的无盖方盒的底面积为 3 600 cm^2 ，那么矩形铁皮各角应切去边长为多少的正方形铁皮？



图 25.1-1



图 25.1-2

设各角切去的正方形铁皮的边长为 x cm，则盒底的长为 $(100 - 2x)$ cm，宽为 $(50 - 2x)$ cm. 根据方盒的底面积为 3 600 cm^2 ，可列得方程

$$(100 - 2x)(50 - 2x) = 3\,600.$$

整理并化简，得

$$x^2 - 75x + 350 = 0. \quad ②$$

方程②中未知数的个数和最高次数各是多少？

由方程②可以得出各角所切正方形铁皮的边长.

问题 2 要组织一次排球邀请赛，赛制为单循环形式（每两支球队之间比赛 1 场）. 根据场地和时间等条件，赛程计划安排 7 天，每天安排 4 场比赛，组织者应邀请多少支球队参赛？

设应邀请 x 支球队参赛，每支球队要与其他 $(x - 1)$ 支球队各赛 1 场，则此次邀请赛共需进行 $\frac{1}{2}x(x - 1)$ 场，所以可列得方程

$$\frac{1}{2}x(x - 1) = 28.$$

为什么需进行 $\frac{1}{2}x(x - 1)$ 场？

整理并化简, 得

$$x^2 - x - 56 = 0.$$

③

方程③中未知数的个数和最高次数各是多少?

由方程③可以得出应邀请的球队数.

思考

方程①②③有什么共同点?

一般地, 如果方程中只含有一个未知数, 且含有未知数的式子都是整式, 未知数的最高次数是 2, 这样的方程叫作**一元二次方程** (quadratic equation with one unknown).

一元二次方程的一般形式是

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0),$$

为什么规定 $a \neq 0$?

其中 ax^2 是二次项, a 是二次项系数; bx 是一次项, b 是一次项系数; c 是常数项.

使一元二次方程左右两边相等的未知数的值, 就是这个一元二次方程的解, 一元二次方程的解也叫作一元二次方程的**根**.

例 将方程 $3x(x-1)=5(x+2)$ 化成一元二次方程的一般形式, 并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项.

解: 去括号, 得

$$3x^2 - 3x = 5x + 10.$$

移项、合并同类项, 得一元二次方程的一般形式

$$3x^2 - 8x - 10 = 0.$$

它的二次项系数为 3, 一次项系数为 -8, 常数项为 -10.

练习

1. 把下列方程化成一元二次方程的一般形式, 并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项:

(1) $5x^2 - 1 = 4x$;

(2) $4x^2 = 81$;

(3) $4x(x+2) = 25$;

(4) $(3x-2)(x+1) = 5x-2$.

2. 根据下列问题, 列出一元二次方程, 并将所列方程化成一元二次方程的一般形式:

- (1) 4 个完全相同的正方形面积之和是 25, 求正方形的边长;
- (2) 一个矩形的长比宽多 2, 面积是 100, 求矩形的长;
- (3) 把长为 1 m 的木条分成两段, 使较短一段的长与木条全长的积, 等于较长一段长的平方, 求较短一段的长.

习题 25.1

复习巩固

1. 将下列方程化成一元二次方程的一般形式, 并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项:
 - (1) $4x^2 + 5x = 81$;
 - (2) $x(x + \frac{1}{2}) = 0$;
 - (3) $(2x - 3)(x - 1) = 0$;
 - (4) $(3x - 2)(x + 1) = x(2x + 1)$.
2. 根据下列问题, 列出一元二次方程, 并将所列方程化成一元二次方程的一般形式:
 - (1) 一个圆的面积是 2π , 求半径 r ;
 - (2) 一个直角三角形的两条直角边的长相差 3, 面积为 9, 求较长直角边的长 x ;
 - (3) 一个直角三角形的一条直角边长是另一条直角边长的 2 倍, 斜边长为 5, 求较短直角边的长.
3. 下列哪些数是一元二次方程 $x^2 + x - 12 = 0$ 的根? 为什么?
 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

综合运用

4. 南宋数学家杨辉所著《田亩比类乘除捷法》中记载了这样一个问题: 直田积 (矩形面积) 八百六十四步, 只云阔不及长一十二步 (宽比长少一十二步), 问阔及长各几步. 根据此问题列方程, 并将所列方程化成一元二次方程的一般形式.

拓广探索

5. 如果 2 是方程 $x^2 - c = 0$ 的一个根, 求解如下问题:
 - (1) 常数 c 是多少?
 - (2) 此方程是否有其他根? 如果有, 求出这个根.

25.2 降次——解一元二次方程

与解一元一次方程类似，解一元二次方程也是把它逐步转化为“ $x=m$ ”的形式. 与一元一次方程不同，一元二次方程是二次的，因此解一元二次方程需要“降次”，即把二次方程转化为一次方程. 本节我们研究如何通过“降次”解一元二次方程.

25.2.1 配方法

先来看一个简单的一元二次方程

$$x^2=4.$$

根据平方根的意义，得

$$x=\pm 2,$$

即

$$x_1=2, x_2=-2.$$

一般地，对于方程

$$x^2=p,$$

- (1) 当 $p>0$ 时，根据平方根的意义，方程有两个不相等的实数根 $x_1=\sqrt{p}$ ， $x_2=-\sqrt{p}$ ；
- (2) 当 $p=0$ 时，方程有两个相等的实数根 $x_1=x_2=0$ ；
- (3) 当 $p<0$ 时，因为对任意实数 x ，都有 $x^2\geq 0$ ，所以方程无实数根.

探究

对照上面解方程 $x^2=4$ 的过程，你认为应怎样解方程 $(x+3)^2=5$ ？

在解方程 $x^2=4$ 时，由方程 $x^2=4$ 得 $x=\pm 2$. 由此想到：由方程

$$(x+3)^2=5, \quad \text{①}$$

得

$$x+3=\pm\sqrt{5},$$

即

$$x+3=\sqrt{5}, \text{ 或 } x+3=-\sqrt{5}. \quad \textcircled{2}$$

于是, 方程 $(x+3)^2=5$ 的两个根为

$$x_1=-3+\sqrt{5}, \quad x_2=-3-\sqrt{5}.$$

在上面的解法中, 由方程①得到②, 实质上是根据平方根的意义, 把一个一元二次方程“降次”, 转化为两个一元一次方程. 这样就把方程①转化为我们会解的方程了.

例 1 解下列方程:

$$(1) \quad 4x^2-3=0;$$

$$(2) \quad (x+2)^2-9=0.$$

解: (1) 移项, 并将二次项系数化为 1, 得

$$x^2=\frac{3}{4}.$$

由此可得

$$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

即

$$x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2) 移项, 得

$$(x+2)^2=9.$$

由此可得

$$x+2=\pm 3,$$

$$x+2=3, \text{ 或 } x+2=-3,$$

即

$$x_1=1, \quad x_2=-5.$$



练习

解下列方程:

$$(1) \quad x^2-9=0;$$

$$(2) \quad 2x^2-8=0;$$

$$(3) \quad 9x^2-5=3;$$

$$(4) \quad (x+6)^2-9=0;$$

$$(5) \quad 3(x-1)^2-6=0;$$

$$(6) \quad x^2-4x+4=5.$$

解方程 $(x+3)^2=5$ 时, 因为它的左边是含有 x 的完全平方式, 右边是非负数, 所以可以直接降次解方程. 对于任意一个一元二次方程, 能否都转化为这种可以直接降次的形式再求解呢?

探究

怎样解方程 $x^2+6x+4=0$?

要把方程 $x^2+6x+4=0$ 转化为像 $(x+3)^2=5$ 这种形式的方程, 关键是将方程的左边转化为一个完全平方式. 为此, 对方程 $x^2+6x+4=0$ 移项, 得

$$x^2+6x=-4.$$

由 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, 将上述方程两边同时加 $(\frac{6}{2})^2$, 即 9, 方程左边就可以配成 $x^2+2mx+m^2$ 形式的完全平方式, 即

$$x^2+6x+9=-4+9.$$

左边写成完全平方形式, 得

$$(x+3)^2=5.$$

解这个方程, 得

$$x_1=-3+\sqrt{5}, x_2=-3-\sqrt{5}.$$

可以验证, $-3\pm\sqrt{5}$ 是方程 $x^2+6x+4=0$ 的两个根.

像上面那样, 通过配成完全平方形式来解一元二次方程的方法, 叫作 **配方法**.

例 2 解下列方程:

$$(1) x^2-8x+1=0; \quad (2) 2x^2+1=3x; \quad (3) 3x^2-6x+4=0.$$

分析: (1) 方程的二次项系数为 1, 可直接运用配方法.

(2) 方程的二次项系数为 2, 为了便于配方, 可把二次项系数化为 1. 为此, 方程的两边都除以 2.

(3) 与 (2) 类似, 方程的两边都除以 3 后再配方.

解: (1) 移项, 得

$$x^2-8x=-1.$$

为什么在方程 $x^2+6x=-4$ 的两边加 9? 加其他数行吗?

配方是为了利用开方实现降次, 把一个一元二次方程转化成两个一元一次方程来解.

配方，得

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + 4^2 &= -1 + 4^2, \\(x - 4)^2 &= 15.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}x - 4 &= \pm\sqrt{15}, \\x_1 &= 4 + \sqrt{15}, \quad x_2 = 4 - \sqrt{15}.\end{aligned}$$

(2) 移项，得

$$2x^2 - 3x = -1.$$

二次项系数化为 1，得

$$x^2 - \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}.$$

配方，得

$$\begin{aligned}x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 &= -\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2, \\(x - \frac{3}{4})^2 &= \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}x - \frac{3}{4} &= \pm\frac{1}{4}, \\x_1 &= 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(3) 移项，得

$$3x^2 - 6x = -4.$$

二次项系数化为 1，得

$$x^2 - 2x = -\frac{4}{3}.$$

配方，得

$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 1^2 &= -\frac{4}{3} + 1^2, \\(x - 1)^2 &= -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

因为实数的平方不会是负数，所以 x 取任何实数时， $(x-1)^2$ 都是非负数，

上式都不成立，所以原方程无实数根.

一般地，一元二次方程可以通过配方转化为

$$(x+n)^2=p$$

的形式.

(1) 当 $p>0$ 时，方程有两个不相等的实数根

$$x_1=-n+\sqrt{p}, x_2=-n-\sqrt{p};$$

(2) 当 $p=0$ 时，方程有两个相等的实数根

$$x_1=x_2=-n;$$

(3) 当 $p<0$ 时，因为对任意实数 x ，都有 $(x+n)^2\geq 0$ ，所以方程无实数根.

练习

1. 填空：

(1) $x^2+10x+\underline{\hspace{1cm}}=(x+\underline{\hspace{1cm}})^2$; (2) $x^2-12x+\underline{\hspace{1cm}}=(x-\underline{\hspace{1cm}})^2$;

(3) $x^2+5x+\underline{\hspace{1cm}}=(x+\underline{\hspace{1cm}})^2$; (4) $x^2-\frac{2}{3}x+\underline{\hspace{1cm}}=(x-\underline{\hspace{1cm}})^2$.

2. 解下列方程：

(1) $x^2+10x+9=0$;

(2) $x^2-x-\frac{7}{4}=0$;

(3) $3x^2+6x-4=0$;

(4) $4x^2-6x-3=0$;

(5) $x^2+4x-9=2x-11$;

(6) $x(x+4)=8x+4$.

25.2.2 公式法

探究

任何一个一元二次方程都可以化成一般形式

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0).$$

能否用配方法得出它的解呢？

我们根据用配方法解一元二次方程的经验解决这个问题.

移项, 得

$$ax^2 + bx = -c.$$

二次项系数化为 1, 得

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

配方, 得

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

即

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \quad \text{①}$$

因为 $a \neq 0$, 所以 $4a^2 > 0$. 式子 $b^2 - 4ac$ 的值有以下三种情况:

(1) 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时, $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$, 由①得

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

方程有两个不相等的实数根

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(2) 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时, $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$, 由①可知, 方程有两个相等的实

数根

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

(3) 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$, 由①可知 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$, 而 x 取任何

实数都不能使 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$ 成立, 因此方程无实数根.

可以发现, 式子 $b^2 - 4ac$ 可以判别一元二次方程的根的情况, 因此把它叫作一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的**根的判别式**, 通常用希腊字母“ Δ ”表示, 即 $\Delta = b^2 - 4ac$.

归纳

由上可知, 对于方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$, 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根.

当 $\Delta \geq 0$ 时, 方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的实数根可写为

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

的形式, 这个式子叫作一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的**求根公式**.

求根公式表达了用配方法解一般形式的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的结果. 解一个具体的一元二次方程时, 把各系数代入求根公式, 可以直接得出方程的根, 这种解一元二次方程的方法叫作**公式法**.

例 3 用公式法解下列方程:

$$(1) x^2 - 4x - 7 = 0; \quad (2) 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0;$$

$$(3) 5x^2 - 3x = x + 1; \quad (4) x^2 + 17 = 8x.$$

解: (1) 因为 $a=1$, $b=-4$, $c=-7$, 所以

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44 > 0.$$

方程有两个不相等的实数根

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{44}}{2 \times 1} = 2 \pm \sqrt{11},$$

即

$$x_1 = 2 + \sqrt{11}, x_2 = 2 - \sqrt{11}.$$

(2) 因为 $a=2$, $b=-2\sqrt{2}$, $c=1$, 所以

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 0.$$

方程有两个相等的实数根

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2\sqrt{2}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(3) 方程化为 $5x^2 - 4x - 1 = 0$, 此时 $a=5$, $b=-4$, $c=-1$, 所以

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 5 \times (-1) = 36 > 0.$$

方程有两个不相等的实数根

确定 a, b, c 的值时, 要注意它们的符号.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \times 5} = \frac{4 \pm 6}{10},$$

即

$$x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{5}.$$

(4) 方程化为 $x^2 - 8x + 17 = 0$, 此时 $a = 1, b = -8, c = 17$, 所以

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 17 = -4 < 0.$$

方程无实数根.

回到本章引言中列出的一元二次方程

$$x^2 + 5x - 25 = 0.$$

用公式法解这个方程, 得

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times (-25)}}{2 \times 1} = \frac{-5 \pm 5\sqrt{5}}{2},$$

即

$$x_1 = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{5}, x_2 = -\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{5}.$$

如果结果保留小数点后两位, 那么 $x_1 \approx 3.09, x_2 \approx -8.09$.

关于这两个根, 只有 $x_1 \approx 3.09$ 符合问题的实际意义, 因此雕像腰部以下身長约为 3.09 m.

练习

用公式法解下列方程:

(1) $x^2 + x - 6 = 0$;

(2) $x^2 - \sqrt{3}x - \frac{1}{4} = 0$;

(3) $3x^2 - 6x + 4 = 0$;

(4) $2x^2 - 3x = 0$;

(5) $x^2 + 4x + 8 = 4x + 11$;

(6) $x(2x - 4) = 5 - 8x$.

25.2.3 因式分解法

一元二次方程一般可以用公式法来解, 但对于像 $x^2 = 4$ 这样的方程, 根据平方根的意义求解较为简便. 下面, 我们继续讨论对于解某些一元二次方程较为简便的方法. 先看下面的问题.

问题 根据物理学规律，如果把一个物体从地面以 10 m/s 的速度竖直上抛，那么物体经过 $x \text{ s}$ 后的离地高度（单位： m ）约为

$$10x - 5x^2.$$

根据上述规律，物体经过多少秒落回地面？

设物体经过 $x \text{ s}$ 落回地面，这时它离地面的高度为 0 m ，即

$$10x - 5x^2 = 0.$$

将方程的左边分解因式，得

$$x(10 - 5x) = 0.$$

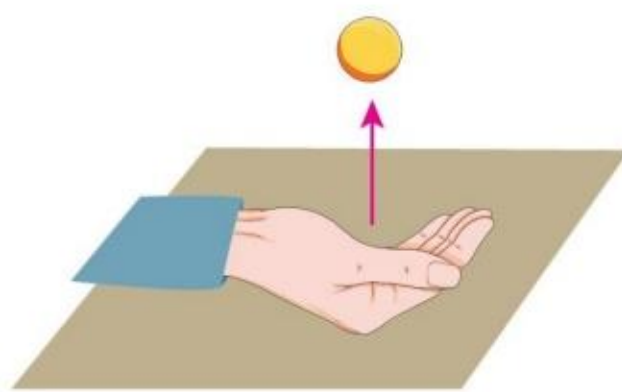
这个方程的左边是两个一次因式的乘积，右边是 0 。我们知道，如果两个因式的积为 0 ，那么这两个因式中至少有一个等于 0 ；反之，如果两个因式中任何一个为 0 ，那么它们的积也等于 0 。所以

$$x = 0, \text{ 或 } 10 - 5x = 0.$$

因此，方程 $10x - 5x^2 = 0$ 的两个根是

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$

对于这两个根， $x_1 = 0$ 表示物体抛离地面的时刻，即在 0 s 时物体被抛出，此刻物体的高度是 0 m ；而 $x_2 = 2$ 表示物体在抛离地面 2 s 时落回地面。



如果 $ab = 0$ ，那么
 $a = 0$ ，或 $b = 0$ 。

思考

解方程 $10x - 5x^2 = 0$ 时，二次方程是如何降为一次的？

可以发现，在上述解法中，由 $10x - 5x^2 = 0$ 到 $x = 0$ 或 $10 - 5x = 0$ 的过程，不是用开平方降次，而是先分解因式，使方程化为两个一次式的乘积等于 0 的形式，再使这两个一次式分别等于 0 ，从而实现降次。这种解一元二次方程的方法叫作**因式分解法**。

例 4 解下列方程：

$$(1) x(x - 2) + x - 2 = 0;$$

$$(2) 5x^2 - 2x - \frac{1}{4} = x^2 - 2x + \frac{3}{4}.$$

解：(1) 左边分解因式，得

$$(x-2)(x+1)=0.$$

于是

$$x-2=0, \text{ 或 } x+1=0,$$

即

$$x_1=2, x_2=-1.$$

(2) 移项、合并同类项，得

$$4x^2-1=0.$$

左边分解因式，得

$$(2x+1)(2x-1)=0.$$

于是

$$2x+1=0, \text{ 或 } 2x-1=0,$$

即

$$x_1=-\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{2}.$$

思考

学习了配方法、公式法、因式分解法等求解一元二次方程的方法后，你能说说它们各自的特点吗？

配方法要先配方，再开方，进而降次；通过配方法可以推出求根公式，公式法直接利用求根公式解方程；因式分解法要先将方程一边化为两个一次因式相乘，另一边为0，再分别使各一次因式等于0.

配方法、公式法适用于所有一元二次方程，因式分解法只在解某些一元二次方程时比较简便. 总之，解一元二次方程的基本思路是：先将二次方程化为两个一次方程，即降次，再分别解两个一次方程.

练习

1. 解下列方程：

$$(1) x^2+x=0;$$

$$(2) x^2-2\sqrt{3}x=0;$$

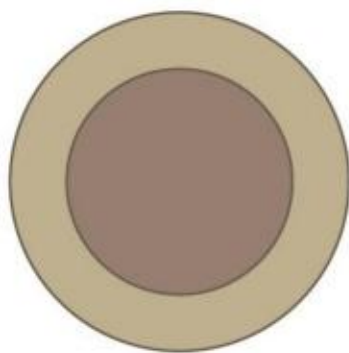
$$(3) 3x^2-6x=-3;$$

$$(4) 4x^2-81=0;$$

$$(5) 3x(2x+1)=4x+2;$$

$$(6) (x-4)^2=(5-2x)^2.$$

2. 如图, 把小圆形场地的半径增加 5 m, 得到大圆形场地, 大圆形场地与小圆形场地的面积比为 9 : 4. 求小圆形场地的半径.



(第 2 题)

25.2.4 一元二次方程的根与系数的关系

由一元二次方程的解法可知, 当 $\Delta \geq 0$ 时, 方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根可由系数 a, b, c 确定. 由求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 可知, 通过对系数 a, b, c 进行有限次加、减、乘、除、乘方、开方等运算, 可以得到方程的根. 求根公式反映了一元二次方程的根与系数的关系, 这种关系还有其他表现形式吗?

思考

观察求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, 它有什么特点? 由此考虑一元二次方程的两个根与系数的关系, 你能获得什么启发?

整体上看, 两个根分别是 “ $m+n$ ” 和 “ $m-n$ ” 的形式, 而且式子 “ n ” 中含有根号. 这种形式的式子相加可以消去 “ n ”, 相乘可以去掉 “ n ” 中的根号, 从而使形式简洁.

因为

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

所以

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

由此得出,一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根 x_1, x_2 与其系数 a, b, c 有如下关系:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

上述关系还可以用如下方法得出.

我们知道,如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的左边可以分解因式为 $a(x-x_1)(x-x_2)$, 那么方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根为 x_1 和 x_2 . 反过来, 如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根为 x_1 和 x_2 , 那么

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

即

$$ax^2+bx+c=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2.$$

由此可得

$$-a(x_1+x_2)=b, ax_1x_2=c.$$

因此

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

例 5 根据一元二次方程的根与系数的关系, 求下列方程两个根 x_1, x_2 的和与积:

$$(1) x^2-6x-15=0; \quad (2) 3x^2+7x-9=0; \quad (3) 5x-1=4x^2.$$

解: (1) $x_1+x_2=-(-6)=6, x_1x_2=-15.$

$$(2) x_1+x_2=-\frac{7}{3}, x_1x_2=\frac{-9}{3}=-3.$$

$$(3) \text{ 方程化为 } 4x^2-5x+1=0, \text{ 所以 } x_1+x_2=-\frac{-5}{4}=\frac{5}{4}, x_1x_2=\frac{1}{4}.$$

练习

不解方程, 求下列方程两个根 x_1, x_2 的和与积:

$$(1) x^2-3x=15;$$

$$(2) 3x^2+2=1-4x;$$

$$(3) 5x^2-1=4x^2-x;$$

$$(4) 2x^2-x+2=3x+1.$$

这种表示方式中, 交换 x_1, x_2 的位置, 不影响它们的和、积的值. 随着后续的学习, 研究一元 n 次方程的根与系数的关系时, 我们会认识到这种表示更具一般性.

习题 25.2



复习巩固

1. 解下列方程:

$$(1) 36x^2 - 1 = 0;$$

$$(2) 4x^2 = 49;$$

$$(3) (x+5)^2 = 25;$$

$$(4) x^2 + 2x + 1 = 4.$$

2. 填空:

$$(1) x^2 + 6x + \underline{\hspace{1cm}} = (x + \underline{\hspace{1cm}})^2;$$

$$(2) x^2 - x + \underline{\hspace{1cm}} = (x - \underline{\hspace{1cm}})^2;$$

$$(3) 4x^2 + 4x + \underline{\hspace{1cm}} = (2x + \underline{\hspace{1cm}})^2;$$

$$(4) x^2 - \frac{2}{5}x + \underline{\hspace{1cm}} = (x - \underline{\hspace{1cm}})^2.$$

3. 用配方法解下列方程:

$$(1) x^2 + 10x + 16 = 0;$$

$$(2) x^2 - x - \frac{3}{4} = 0;$$

$$(3) 3x^2 + 6x - 5 = 0;$$

$$(4) 4x^2 - x - 9 = 0.$$

4. 利用一元二次方程根的判别式判断下列方程的根的情况:

$$(1) 2x^2 - 3x - \frac{3}{2} = 0;$$

$$(2) 16x^2 - 24x + 9 = 0;$$

$$(3) x^2 - 4\sqrt{2}x + 9 = 0;$$

$$(4) 3x^2 + 10 = 2x^2 + 8x.$$

5. 用公式法解下列方程:

$$(1) x^2 + x - 12 = 0;$$

$$(2) x^2 - \sqrt{2}x - \frac{1}{4} = 0;$$

$$(3) x(x-4) = 2 - 8x;$$

$$(4) x^2 + 2\sqrt{5}x + 10 = 0.$$

6. 用因式分解法解下列方程:

$$(1) 3x^2 - 12x = -12;$$

$$(2) 4x^2 - 144 = 0;$$

$$(3) 3x(x-1) = 2(x-1);$$

$$(4) (2x-1)^2 = (3-x)^2.$$

7. 求下列方程两个根 x_1 , x_2 的和与积:

$$(1) x^2 - 3x + 2 = 10;$$

$$(2) 5x^2 + x - 5 = 0;$$

$$(3) x^2 + x = 5x + 6;$$

$$(4) 7x^2 - 5 = x + 8.$$

综合运用

8. 一个直角三角形的两条直角边的长相差 5, 面积是 7, 求斜边的长.

9. 用适当方法解下列方程:

$$(1) 3x^2 = 54;$$

$$(2) x^2 - 4x = 8;$$

(3) $3x^2 - 1 = 2x$;

(4) $x^2 - 6x + 9 = (5 - 2x)^2$.

10. 无论 p 取何值, 方程 $(x-3)(x-2)-p^2=0$ 总有两个不相等的实数根吗? 如果有, 求出这两个根; 如果没有, 说明理由.

拓展探索

11. 已知方程 $2x^2 - 6x + 3 = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 , 求下列式子的值:

(1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;

(2) $x_1^2 + x_2^2$.

12. (1) 因为 $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = (x-1)(x-3)(x-4)$, 所以 1, 3, 4 是一元三次方程 $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$ 的三个根, 计算 $1+3+4$, $1 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 1$, $1 \times 3 \times 4$ 的值, 它们与一元三次方程 $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$ 的系数有什么关系?

- (2) 如果一元三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 有三个实数根 x_1, x_2, x_3 , 那么 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 可以化为 $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. 由此你能发现 x_1, x_2, x_3 与一元三次方程的系数 a, b, c, d 之间的关系吗?

阅读与思考

一元二次方程与黄金分割数

本章引言中有一个关于人体雕像身长比例的问题, 可以将其一般化: 如图 1, 在线段 AB 上找一个点 C , 它把线段 AB 分为不相等的两段 AC 和 CB , 其中 $AC < CB$, 且使 $AC : CB = CB : AB$.



图 1

为简单起见, 设 $AB=1$, $CB=x$, 则 $AC=1-x$, 代入 $AC : CB = CB : AB$, 得 $(1-x) : x = x : 1$, 即 $x^2 + x - 1 = 0$. 解方程, 得 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

根据问题的实际意义, 取 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, 这个值就是上面问题中所求长度的比.

人们把 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 这个数叫作黄金分割数. 如果

一些有关线段成比例的问题, 往往可转化为利用一元二次方程求解的问题, 再通过求解方程, 获得问题的答案.

把一条线段分为两部分，使其中较短一段与较长一段的长度比是黄金分割数，那么较长一段与整个线段的长度比也是黄金分割数.

黄金分割数在很多优美的图案中都有体现. 如在常见的正五角星（图 2）中存在黄金分割数. 随着后面“相似”内容的学习，通过解一元二次方程，可以证明 $\frac{MN}{NB} = \frac{BN}{BM} =$



图 2

$\frac{BM}{BE} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 再如，观察鹦鹉螺外壳的截面（图 3），可以看出其轮廓形如黄金螺线（图 4），而黄金螺线恰恰是通过黄金分割数得到的.



图 3

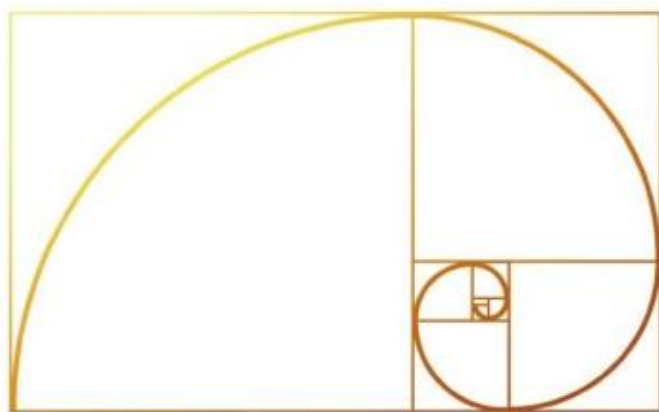


图 4

长期以来，很多人认为黄金分割数是一个很特别的数. 早在古希腊时期，《原本》中就有关于“内外比”的记载，即我们所说的黄金分割数. 在古希腊以及文艺复兴时期的许多艺术设计中，都能发现黄金分割数的“身影”. 因此，黄金分割数也常被视作一种数学眼光下的美的标准. 例如，一些名画和雕塑中人的腰部以上与以下身长之比大都接近黄金分割数，就可以增加美感.

优选法中有一种 0.618 法应用了黄金分割数. 优选法是一种具有广泛应用价值的数学方法，著名数学家华罗庚曾为普及它作出重要贡献. 1985 年 6 月 12 日，华罗庚去世前几小时，仍在进行题为《理论数学及其应用》的学术报告（图 5），报告主要内容即优选法. 华罗庚曾说过，他要工作到人生的最后一刻. 他践行了自己的诺言.

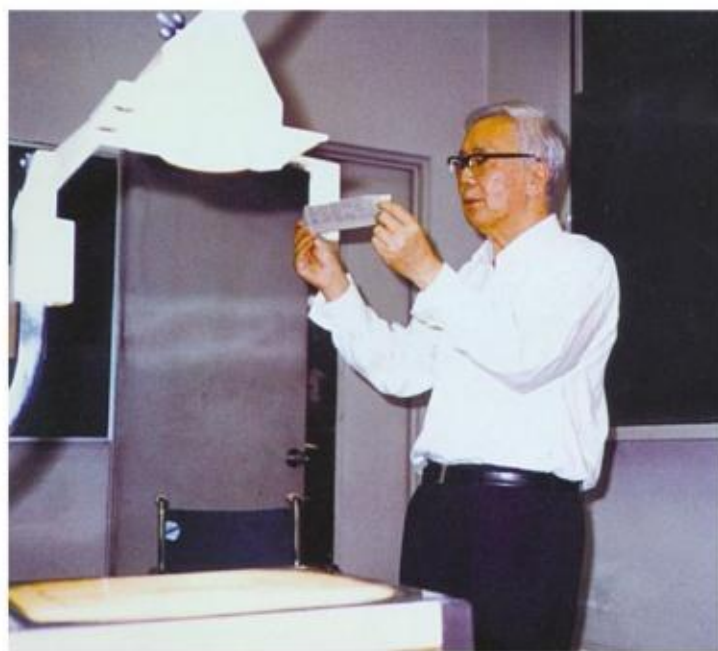


图 5

同学们可以查阅资料，进一步了解黄金分割数及其应用.

25.3 实际问题与一元二次方程

同一元一次方程、二元一次方程（组）一样，一元二次方程也是刻画某些问题中等量关系的数学模型，运用一元二次方程可以解决很多问题.

例 1 是否存在三边长是三个连续正整数的直角三角形？如果存在，这样的三角形有多少个？

解：若存在这样的三角形，设其三边长依次为 x ， $x+1$ ， $x+2$ ，其中 x 为正整数.

由勾股定理，得

$$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2.$$

解方程，得

$$x_1 = 3, x_2 = -1 \text{ (不符合题意, 舍去).}$$

因此，三边长是三个连续正整数的直角三角形存在且只有一个，其三边长分别为 3，4，5.

例 2 用一根长为 40 m 的细绳，能否围成一个面积为 96 m^2 的矩形区域？如果能围成，这样的矩形是否唯一？

分析：假设细绳能围成面积为 96 m^2 的矩形区域，则矩形的周长就是细绳的长度. 设矩形一边长为 $x \text{ m}$ ，由周长为 40 m，可用含 x 的式子表示出该边的邻边长，再利用面积列方程求解.

解：设矩形的一边长为 $x \text{ m}$ ，由矩形的周长为 40 m，可得此边的邻边长为 $(20-x) \text{ m}$ ；再由矩形的面积为 96 m^2 ，得

$$x(20-x) = 96.$$

解方程，得

$$x_1 = 12, x_2 = 8.$$

因此，用一根长为 40 m 的细绳可以围成面积为 96 m^2 的矩形区域，这样的矩形唯一，其两邻边长分别为 8 m，12 m.

方程有两个根，是否表示可以围成两个满足条件的矩形区域？

思考

对于例 2 中的问题，设矩形的两邻边长的方法有多种. 例如：

(1) 可设一边长为 x m，那么其邻边长为 $\frac{96}{x}$ m；

(2) 可设一边长为 $(10+x)$ m，那么其邻边长为 $(10-x)$ m.

能根据以上设两邻边长的方法列方程求解例 2 吗？比较这些设法，说说它们各自的特点.

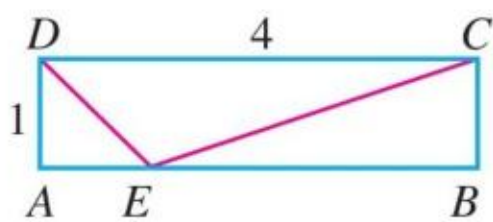
练习

1. 怎样用一根长为 40 m 的细绳围成一个面积为 75 m^2

的矩形区域？能围成一个面积为 101 m^2 的矩形区域吗？如果能，说明围法；如果不能，说明理由.

2. 如图，矩形 $ABCD$ 的两条邻边 $AD=1$ ， $CD=4$ ，

AB 上是否存在点 E ，使得 $\angle DEC$ 为直角？



(第 2 题)

接下来，我们进一步探究如何运用一元二次方程解决现实生活中的问题.

探究 1

某种传染病的传染速度很快. 如果开始有 1 个人被传染，经过两轮传染后共有 121 个人被传染，那么每轮传染中平均 1 个人传染了多少个人？

分析：设每轮传染中平均 1 个人传染了 x 个人.

开始有 1 个人被传染，第一轮传染源就是这个人，他传染了 x 个人，用代数式表示，第一轮后共有_____个人被传染；第二轮传染中，这些人中的每个人又传染了 x 个人，用代数式表示，第二轮后共有_____个人被传染.

列方程

$$1+x+x(1+x)=121.$$

解方程，得

$$x_1=10, x_2=-12 \text{ (不合题意, 舍去).}$$

因此，每轮传染中平均 1 个人传染了 10 个人.

通过探究本题，谈谈你对类似的传播问题中数量关系的认识.

思考

按照这样的传染速度，经过三轮传染后共有多少个人被传染？由此体会阻断病毒传播的必要性。

探究2

两年前生产 1 t 甲种食品的成本是 10 000 元，生产 1 t 乙种食品的成本是 12 000 元. 随着生产技术的进步，现在生产 1 t 甲种食品的成本是 6 000 元，生产 1 t 乙种食品的成本是 7 200 元. 哪种食品成本的年平均下降率较大？

分析：容易求出，甲种食品成本的年平均下降额为 $(10\,000 - 6\,000) \div 2 = 2\,000$ (元)，乙种食品成本的年平均下降额为 $(12\,000 - 7\,200) \div 2 = 2\,400$ (元). 显然，乙种食品成本的年平均下降额较大. 但年平均下降额 (元) 不等同于年平均下降率 (百分数).

设甲种食品成本的年平均下降率为 x ，则一年后甲种食品成本为 $10\,000(1-x)$ 元，两年后甲种食品成本为 $10\,000(1-x)^2$ 元，于是有

$$10\,000(1-x)^2 = 6\,000.$$

解方程，得

$$x_1 \approx 0.225, x_2 \approx 1.775.$$

根据问题的实际意义，甲种食品成本的年平均下降率约为 22.5%.

为什么选择 22.5% 作为答案？

请计算乙种食品成本的年平均下降率，并比较两种食品成本的年平均下降率.

思考

经过计算，你能得出什么结论？成本下降额大的食品，它的成本下降率一定大吗？应怎样全面比较几个对象的变化情况？

练习

1. 某种植物的主干长出若干数目的支干，每个支干又长出与这些支干同样数目的小分支. 如果主干、支干和小分支的总数是 91，那么每个支干长出多少个小分支？

2. 青山村所种水稻某年平均每公顷产 15 000 kg, 两年后平均每公顷产 18 000 kg. 求这两年水稻每公顷产量的年平均增长率 (结果写成 $a\%$ 的形式, 其中 a 保留小数点后两位).

回到本章第一节中的排球邀请赛问题, 通过“设应邀请 x 支球队参赛”, 并根据“每两支球队之间比赛 1 场”, 列得方程 $x^2 - x - 56 = 0$.

解方程, 得 $x_1 = 8$, $x_2 = -7$ (不合题意, 舍去).

因此, 比赛组织者应邀请 8 支球队参赛.

下面再来看一种有关比赛球队数量与场数的问题.

探究3

若干支球队进行主客场双循环比赛, 有人说, 我算出总场数正好是 300. 他算得对吗? 为什么?

分析: 双循环比赛是指所有参赛球队彼此间进行两场比赛. 如果有 n 支球队参赛, 那么比赛的总场数为 $n(n-1)$.

假设这个人算得对, 即 n 支球队进行主客场双循环比赛的总场数为 300, 那么

$$n(n-1) = 300.$$

解方程, 得

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1\,201}}{2}.$$

由于 1 201 不是完全平方数, 所以 n 不可能为整数.

因此, 总场数不可能为 300, 这个人算得不对.

由总场数为 $n(n-1)$ 可知, 其必为两个连续正整数的乘积, 如 2, 6, 12, 20, ..., 240, 272, 306, ...

练习

1. n 个人参加聚会, 每两人都握 1 次手, 所有人共握手 10 次, 共有多少人?
2. 一个凸多边形共有 20 条对角线, 它是几边形? 是否存在有 18 条对角线的多边形? 如果存在, 它是几边形? 如果不存在, 说明理由.

习题 25.3

复习巩固

1. 两个数的和是 26，积是 168，求这两个数.
2. 一个直角三角形的两条直角边的和是 14，面积是 24. 求这两条直角边的长.
3. 某足球联赛采用双循环赛制，如果赛季结束后共比赛 90 场，那么共有多少支球队参加比赛？
4. 2022 年我国快递业务量是 1 105.8 亿件，2024 年增至 1 750.8 亿件，这两年的年平均增长率是多少（结果写成 $a\%$ 的形式，其中 a 保留小数点后一位）？
5. 请结合生活实际，提出一个与一元二次方程有关的问题，并加以解决.

综合运用

6. 一个菱形的两条对角线长之和是 10，面积是 12. 求这个菱形的周长.
7. 如图，要为两边长分别为 22 cm，29 cm 的照片配相框，要求相框的四条边宽度相等，并且相框边的面积是照片面积的四分之一，相框边的宽度应是多少厘米（结果保留小数点后一位）？
8. 一个直角三角形的三边长均为正整数，斜边的长比一直角边的长多 1，比另一直角边的长多 8，这样的直角三角形存在吗？如果存在，有多少个？



(第 7 题)

拓广探索

9. 如图，要设计一幅宽 20 cm，长 30 cm 的图案，其中有两横两竖的彩条，横、竖彩条的宽度比为 3 : 2. 如果要使彩条所占面积是图案面积的四分之一，应如何设计彩条的宽度（结果保留小数点后一位）？
10. 如图，线段 AB 的长为 1，点 C, D, E 在线段 AB 上.



(第 9 题)



(第 10 题)

- (1) 若 $AC^2 = BC \cdot AB$ ，求线段 AC 的长；
 - (2) 在 (1) 的条件下，若 $AD^2 = CD \cdot AC$ ，求线段 AD 的长；
 - (3) 在 (1) (2) 的条件下，若 $AE^2 = DE \cdot AD$ ，求线段 AE 的长.
- 上面各题的结果反映了什么规律？

数学活动

活动1 探究方程有公共解的条件

已知 $abc \neq 0$ ，方程

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{①}$$

$$bx^2 + cx + a = 0, \quad \text{②}$$

$$cx^2 + ax + b = 0 \quad \text{③}$$

恰有一个公共解.

给出 a, b, c 满足的条件，并求出方程①②③的解.

活动2 神奇的线段分割

王芳：李明，我们来做个智力游戏吧. 你能把任意一条线段分成两两不等的三条线段，使其中最长的线段等于另外两条线段的和吗？

李明：这简单，你来试试这个. 还是把一条线段分成两两不等的三条线段，如果三条线段的长度分别为 a, b, c ，且 $a > b > c$ ，你能找到合适的 a, b, c ，使 $a = b + c$ 和 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ 同时成立吗？

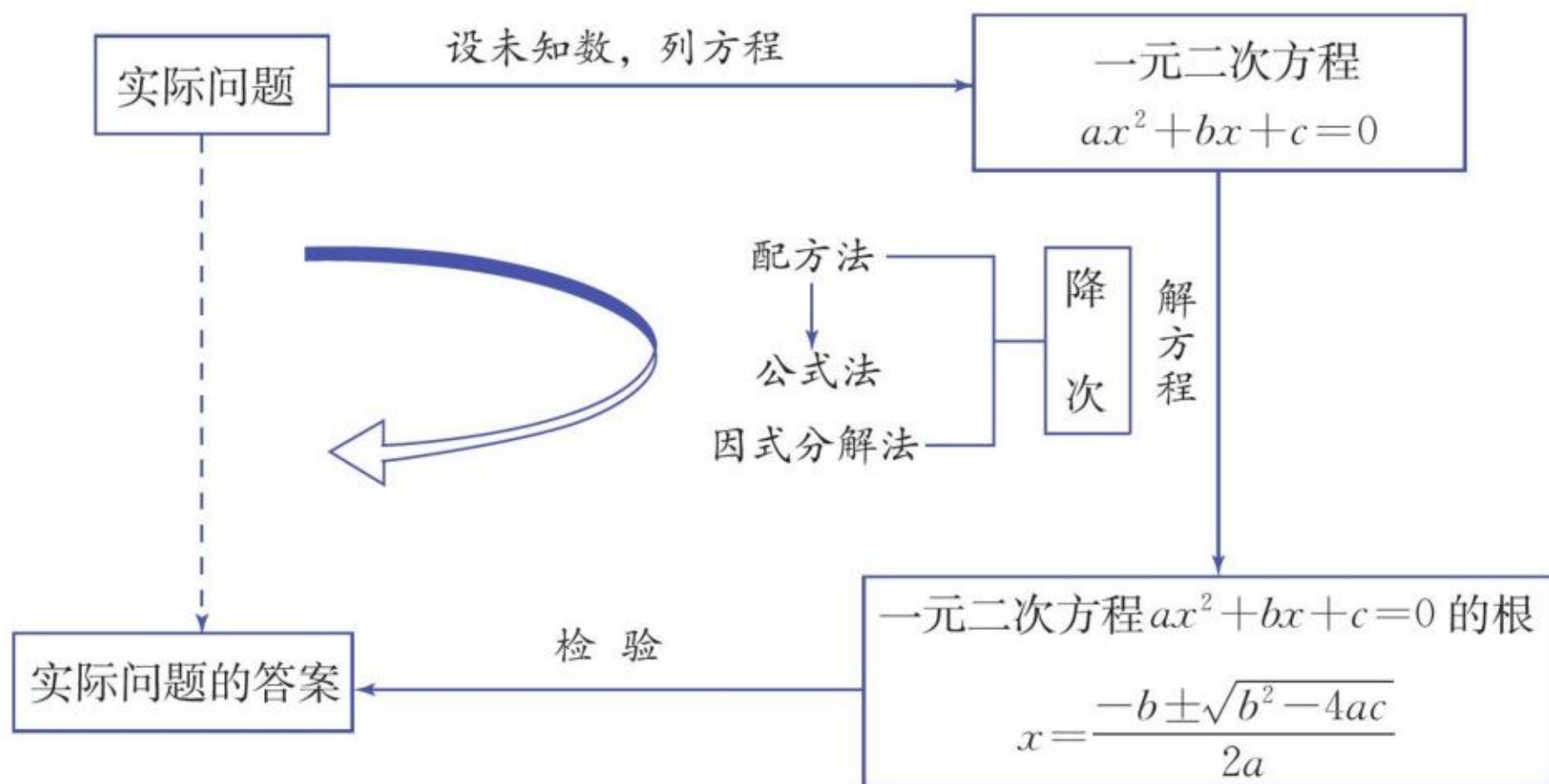
王芳：这可能吗？

李明：当然，不过要费一番脑筋.

现在，你来试一试解决王芳和李明提出的问题，并用直尺和圆规作出李明提出的问题中线段的两个分点.

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章主要内容是一元二次方程的概念、解法、根与系数的关系以及运用一元二次方程解决实际问题.

一元二次方程是含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 2 的整式方程. 解一元二次方程的基本思想是“降次”, 即通过配方、因式分解等方法, 把一个一元二次方程转化为两个一元一次方程来解. 配方法就是通过配方, 把一元二次方程转化为 $(x+n)^2=p$ 的形式, 根据平方根的意义求解; 一元二次方程的求根公式, 是通过对方程 $ax^2+bx+c=0$ 配方后得到 $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 获得的. 若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的左边能分解为两个一次因式的乘积, 则可通过令每个因式为 0 来解. 通过解一元二次方程, 可以提升我们的运算能力、推理能力. 一元二次方程的根可由其系数表示, 通过求根公式或分解因式, 可以得到其根与系数的关系.

在配方法、公式法、因式分解法这三种一元二次方程的解法中, 配方法是推导一元二次方程求根公式的工具. 掌握了公式法, 就可以直接用公

式求一元二次方程的根. 解具体的方程时, 需要根据方程的特点选择适当的解法. 配方法是一种重要的、应用广泛的数学方法, 如后面研究二次函数时也要用到它.

一元二次方程是刻画某些现实世界问题中的等量关系的有效数学模型. 在运用一元二次方程分析、表达和解决实际问题的过程中, 要注意体会建立数学模型解决实际问题的思想和方法, 增强模型观念.

请你带着下面的问题, 复习一下全章的内容吧.

1. 比较你学过的各种整式方程, 说明它们的未知数的个数与次数. 你能写出这些方程的一般形式吗?

2. 一元二次方程有哪些解法? 各种解法在什么情况下比较适用? 你能说说“降次”在解一元二次方程中的作用吗?

3. 求根公式与配方法有什么关系? 如何判断一元二次方程根的情况?

4. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根 x_1, x_2 与系数 a, b, c 有什么关系? 我们是如何得到这种关系的?

5. 你能举例说明运用一元二次方程解决实际问题的过程吗?



复习题 25

复习巩固

1. 解下列方程:

(1) $64x^2-1=0$;

(2) $4x^2+12x+9=81$;

(3) $x^2-7x-1=0$;

(4) $2x^2+3x=3$;

(5) $x^2-2x+1=25$;

(6) $x(2x-5)=4x-10$;

(7) $x^2+5x+7=3x+11$;

(8) $1-4x+16x^2=2-8x$.

2. 解决第 2 页的问题 1.

3. 两个数的和为 8, 积为 9.75, 求这两个数.

4. 一个菱形的两条对角线的长相差 2, 其面积为 4, 求两条对角线的长.

5. 求下列方程两个根 x_1, x_2 的和与积:

(1) $x^2-5x-10=0$;

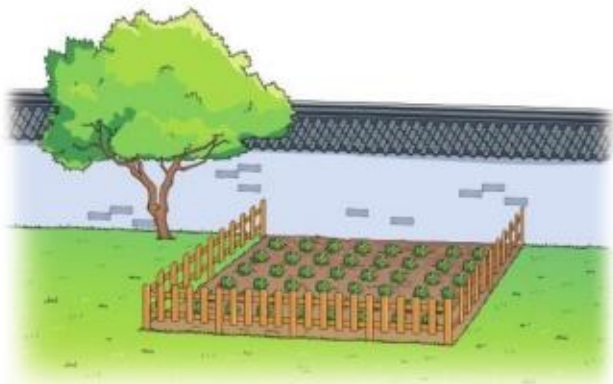
(2) $2x^2+7x+1=0$;

(3) $3x^2-1=2x+5$;

(4) $x(x-1)=3x+7$.

综合运用

6. 已知关于 x 的方程 $2x^2 - (4k+1)x + 2k^2 - 1 = 0$, 当 k 为何值时, 方程有两个不相等的实数根, 有两个相等的实数根, 没有实数根?
7. 一个直角梯形的下底比上底长 2 cm, 高比上底短 1 cm, 面积是 8 cm^2 . 画出这个梯形.
8. 一个长方体的长与宽的比为 $5:2$, 高为 5 cm, 表面积为 40 cm^2 . 画出这个长方体的展开图.
9. 要组织一次篮球联赛, 赛制为单循环形式, 计划安排 15 场比赛, 应邀请多少支球队参加比赛?
10. 如图, 在一面墙 (墙的长度不限) 边, 怎样用 20 m 长的篱笆围成一个面积为 48 m^2 的矩形菜园?
11. 某银行经过两次降息, 使一年期存款的年利率由 1.75% 降至 1.50%, 平均每次降息的百分率是多少 (结果写成 $a\%$ 的形式, 其中 a 保留小数点后两位)?
12. 绿水村 2020 年的人均收入为 18 000 元, 2022 年的人均收入为 21 000 元. 求人均收入的年平均增长率 (结果写成 $a\%$ 的形式, 其中 a 保留小数点后两位).



(第 10 题)

拓广探索

13. 右图是南宋数学家杨辉研究的垛积问题中“圭垛”的示意图, 其问题如下: 今有圭垛一堆. 上一束, 底宽八束. 问共几束.
(1) 你能解决这个问题吗?
(2) 如果将这个“圭垛”继续堆积下去, 即第 n 行有 n 束……
你能发现从上往下数前多少行的束数的和是 300 吗? (提示: $1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.)



(第 13 题)

14. 一个小球以 5 m/s 的速度开始向前滚动, 并且均匀减速, 4 s 后小球停止滚动.
(1) 小球的滚动速度平均每秒减少多少?
(2) 小球滚动 5 m 用了多少秒 (结果保留小数点后一位)?
(提示: 匀变速直线运动中, 每个时间段内的平均速度 $\bar{v}$ (初速度与末速度的算术平均数) 与路程 l , 时间 t 的关系为 $l = \bar{v}t$.)

第二十六章 二次函数

函数是描述现实世界中变量关系和变化规律的数学模型. 我们已经学习过利用一次函数表示一个变量随另一个变量均匀变化的关系, 下面再来看一些变量之间的更为复杂的关系.

用长为 40 m 的细绳围成一个矩形区域, 矩形区域的面积 y (单位: m^2) 会随矩形一边长 x (单位: m) 的变化而变化, y 与 x 之间有什么关系?

再看章前图, 从喷头喷出的水珠, 在空中经过的路线是一条曲线. 在这条曲线的各个位置上, 水珠的竖直高度 y 与它距离喷头的水平距离 x 之间有什么关系?

回答上述问题就要用到二次函数. 像学习一次函数一样, 本章我们首先讨论什么样的函数是二次函数, 然后讨论二次函数的图象和性质, 由此加深对一元二次方程的认识, 最后运用二次函数分析和解决某些实际问题. 通过上述过程, 进一步体会函数在描述现实世界中变量关系和变化规律时的作用.



26.1 二次函数的概念

在现实世界中，变量之间的关系多种多样. 作为描述变量之间关系的函数，其种类也很丰富.

我们先来分析本章引言中的矩形区域问题.

显然，矩形的一边长 x 和面积 y 都是变量，而且对于 x 的每一个确定的值， y 都有唯一确定的值与其对应，即 y 是 x 的函数. 根据矩形面积公式，它们之间的关系可以表示为 $y = x(20 - x)$ ，即

$$y = -x^2 + 20x. \quad ①$$

这是一个不同于一次函数的新函数.

再来看几个问题.

问题 1 n 支球队参加比赛，每两队之间进行 1 场比赛. 比赛的场次数 m 与球队数 n 之间有什么关系？

每支球队都要与其他 $(n-1)$ 支球队各比赛 1 场，由于甲队对乙队的比赛与乙队对甲队的比赛是同一场比赛，所以比赛的场次数 $m = \frac{1}{2}n(n-1)$ ，即

$$m = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n. \quad ②$$

②式表示比赛的场次数 m 与球队数 n 之间的关系，其中 m 和 n 都是变量，而且对于 n 的每一个确定的值， m 都有唯一确定的值与其对应，即 m 是 n 的函数.

问题 2 某种产品现在的年产量是 20 t，计划今后两年增加产量. 如果每年都比上一年的产量增加 x 倍，那么两年后这种产品的产量 y （单位：t）将由 x 的值确定， y 与 x 之间的关系应怎样表示？

这种产品的原产量是 20 t，一年后的产量是 $20(1+x)$ t，再经过一年后的产量是 $20(1+x)(1+x)$ t，即两年后的产量 $y = 20(1+x)^2$ ，即

$$y = 20x^2 + 40x + 20. \quad ③$$

③式表示了两年后的产量 y 与每年的计划增产倍数 x 之间的关系，其中 x 和 y 都是变量，而且对于 x 的每一个确定的值， y 都有唯一确定的值与其对应，即 y 是 x 的函数.

思考

观察函数①②③，它们有什么共同点？

上述问题中，函数都是用自变量的二次式表示的. 一般地，形如

$$y=ax^2+bx+c \quad (a, b, c \text{ 是常数}, a \neq 0)$$

的函数，叫作**二次函数** (quadratic function). 其中 x 是自变量， a, b, c 分别是函数解析式的二次项系数、一次项系数和常数项.

例 (1) 一个圆柱的高等于底面半径，写出它的表面积 S 关于半径 r 的函数解析式.

(2) 一种产品某年的销售量为 8 万件，由于其他新产品的出现，后两年的年销售量有所下降，年平均下降率是 x . 写出两年后产品的年销售量 y (单位：万件) 关于 x 的函数解析式.

解：(1) 圆柱表面积是其底面积与侧面积的和，所以 $S=2\pi r^2+2\pi r \cdot r$ ，即

$$S=4\pi r^2.$$

(2) 一年后产品的年销售量为 $8(1-x)$ 万件，两年后的年销售量为 $8(1-x)(1-x)$ 万件，所以 $y=8(1-x)^2$ ，即

$$y=8x^2-16x+8.$$

练习

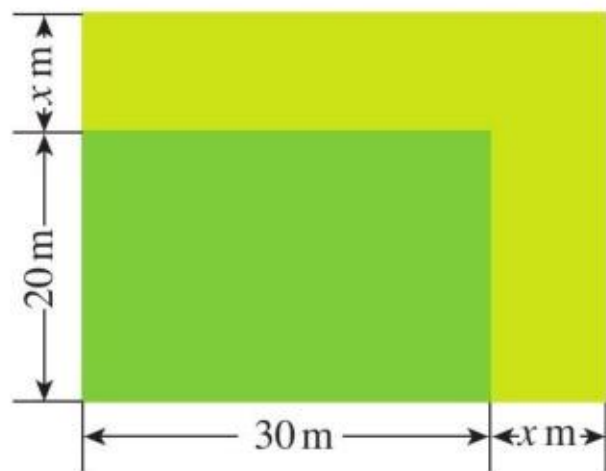
1. 写出下列二次函数的二次项系数、一次项系数和常数项：

(1) $y=8x^2-16x+8$; (2) $y=x^2$;

(3) $y=-\frac{1}{2}x^2+5x$; (4) $y=2(x-1)^2-5$.

2. 如图，矩形绿地的两边长各增加 x m，扩充后的绿地面积为 y m². 写出 y 关于 x 的函数解析式.

3. 提出一个问题，使其中变量之间的关系可以用一个二次函数来表示.



(第 2 题)

习题 26.1

复习巩固

1. 某商场一月份的销售额为 50 万元, 二、三月份每月销售额的平均增长率为 x , 写出三月份的销售额 y (单位: 万元) 关于 x 的函数解析式.
2. 设人民币一年期定期储蓄的年利率是 x , 一年到期后, 银行将本金和利息自动按一年期定期储蓄转存. 如果本金是 30 000 元, 写出两年后的本息之和 y (单位: 元) 关于年利率 x 的函数解析式.

综合运用

3. 如图, 一面圆形的镜子, 其周边镶有宽为 5 cm 的边框. 已知镜面的价格是每平方米 180 元, 边框的价格是每平方米 100 元, 求这面镜子的价格 y (单位: 元) 关于镜子半径 x (单位: m) 的函数解析式.



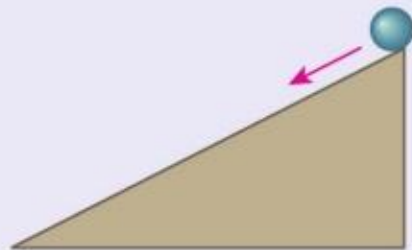
(第 3 题)

拓广探索

4. 如图, 钢球从斜面顶端由静止开始沿斜面滚下, 速度每秒增加 1.5 m/s.

- (1) 写出钢球滚动的距离 l (单位: m) 关于滚动的时间 t (单位: s) 的函数解析式. (提示: 本题中, 距离 = 平均速度 $\bar{v} \times$ 时间 t , $\bar{v} = \frac{v_0 + v_t}{2}$, 其中, v_0 是开始时的速度, v_t 是 t s 时的速度.)

- (2) 如果斜面的长是 3 m, 钢球从斜面顶端滚到底端要用多长时间?



(第 4 题)

26.2 二次函数的图象和性质

与学习一次函数一样，在学习了二次函数的概念之后，我们来研究它的图象和性质. 先从简单的二次函数 $y=ax^2$ 开始，逐步深入到一般的二次函数. 在这个过程中，数形结合，即解析式与图象结合是重要的研究方法.

26.2.1 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

先来研究最简单的二次函数 $y=x^2$ ，画出它的图象.

对于 $y=x^2$ ，自变量 x 可以是任意实数，列表表示几组对应值：

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y=x^2$	...	9	4	1	0	1	4	9	...

根据表中 x ， y 的值在平面直角坐标系中描点 (x, y) (图 26.2-1)，再用平滑曲线顺次连接各点，就得到 $y=x^2$ 的图象 (图 26.2-2).

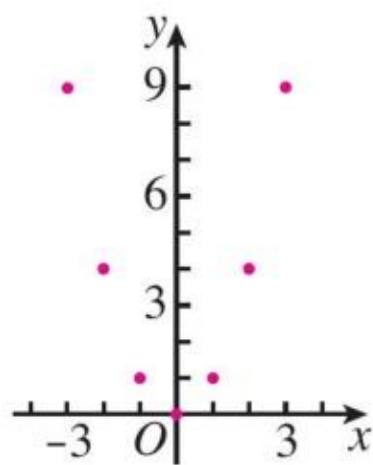


图 26.2-1

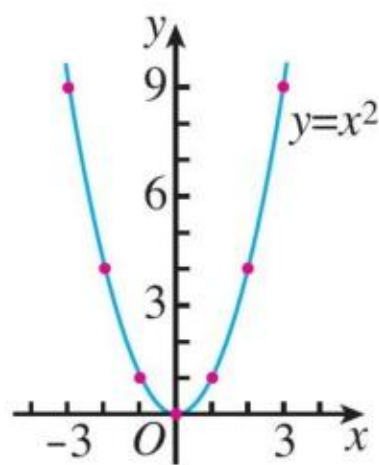


图 26.2-2

还记得如何用描点法画一个函数的图象吗？

可以看出，二次函数 $y=x^2$ 的图象是一条曲线，它的形状类似投篮或掷铅球时球在空中经过的路线，只是这条曲线开口向上. 实际上，二次函数的图象都是类似的曲线，它们的开口或者向上或者向下. 我们把二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象叫作**抛物线** $y=ax^2+bx+c$.



由图 26.2-2 还可以看出, y 轴是抛物线 $y=x^2$ 的对称轴, 抛物线 $y=x^2$ 与其对称轴的交点 $(0, 0)$ 叫作抛物线 $y=x^2$ 的顶点, 它是抛物线 $y=x^2$ 的最低点. 实际上, 每条抛物线都有对称轴, 抛物线与对称轴的交点叫作抛物线的顶点. 顶点是抛物线的最低点或最高点.

从二次函数 $y=x^2$ 的图象可以看出: 在对称轴的左侧, 抛物线从左到右下降; 在对称轴的右侧, 抛物线从左到右上升. 也就是说, 当 $x<0$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $x>0$ 时, y 随 x 的增大而增大.

在抛物线 $y=x^2$ 上任取一点 (m, m^2) , 因为该点关于 y 轴的对称点 $(-m, m^2)$ 也在抛物线 $y=x^2$ 上, 所以抛物线 $y=x^2$ 关于 y 轴对称.

例 1 在同一平面直角坐标系中, 画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=2x^2$ 的图象.

解: 分别列表, 再画出它们的图象 (图 26.2-3).

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y=\frac{1}{2}x^2$	...	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8	...

x	...	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	...
$y=2x^2$	...	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8	...

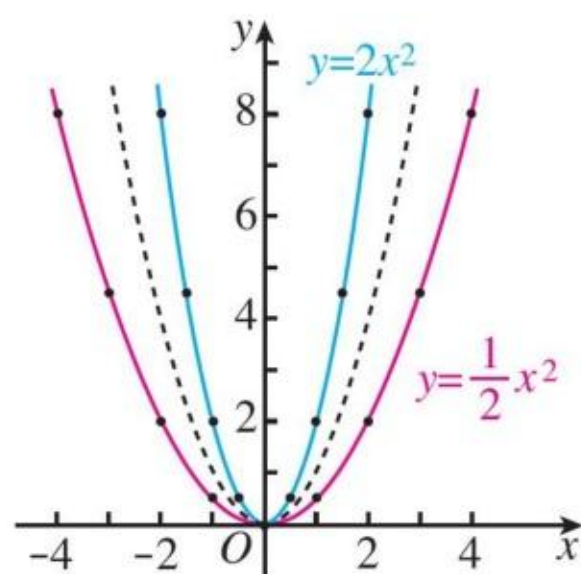


图 26.2-3

思考

(1) 函数 $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=2x^2$ 的图象与函数 $y=x^2$ 的图象 (图 26.2-3 中的虚线图形) 相比, 有什么共同点和不同点?

(2) 利用信息技术工具画二次函数 $y=ax^2$ ($a>0$) 的图象, 改变 a 的值, 函数 $y=ax^2$ 的图象也发生了改变 (图 26.2-4). 随着 a 的变化, 二次函数 $y=ax^2$ 的图象有什么变化?

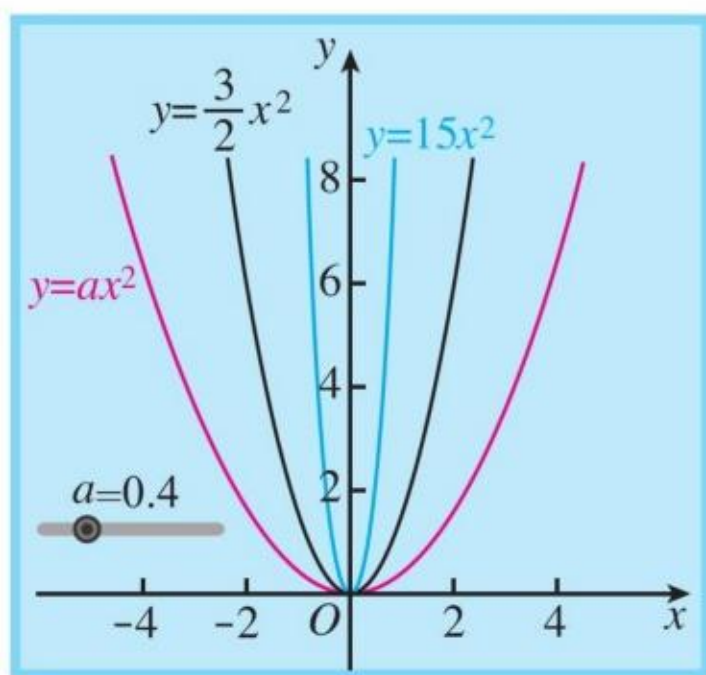


图 26.2-4

一般地, 当 $a > 0$ 时, 抛物线 $y = ax^2$ 的开口向上, 对称轴是 y 轴, 顶点是原点, 顶点是抛物线的最低点, a 越大, 抛物线的开口越小.

进一步, 从二次函数 $y = ax^2$ ($a > 0$) 的图象可以看出: 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大.

探究

回顾上面研究二次函数 $y = ax^2$ ($a > 0$) 的图象和性质的过程, 你能用类似的方法研究二次函数 $y = ax^2$ ($a < 0$) 的图象和性质吗?

类似于对函数 $y = ax^2$ ($a > 0$) 的研究, 可以在同一平面直角坐标系中画出函数 $y = -x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$, $y = -2x^2$ 的图象(图 26.2-5), 观察这些抛物线有什么共同点和不同点. 也可以利用信息技术工具画二次函数 $y = ax^2$ ($a < 0$) 的图象, 改变 a 的值, 观察随着 a 的变化, 二次函数 $y = ax^2$ 的图象的变化.

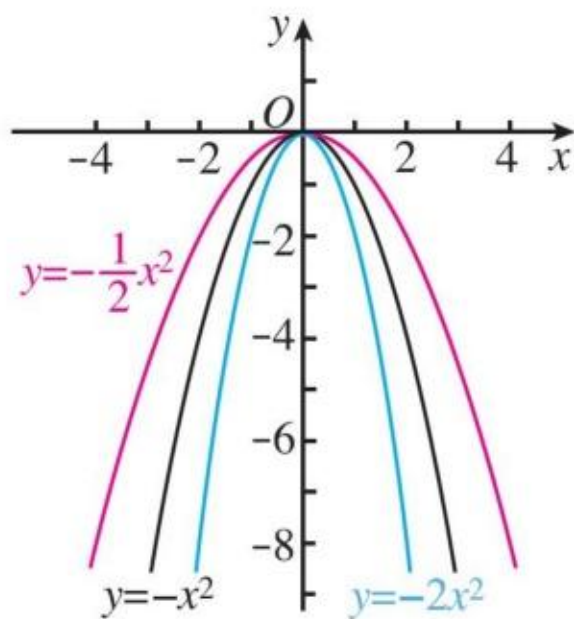


图 26.2-5

一般地, 当 $a < 0$ 时, 抛物线 $y = ax^2$ 的开口向下, 对称轴是 y 轴, 顶点是原点, 顶点是抛物线的最高点, a 越小, 抛物线的开口越小. 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小.

归纳

一般地, 抛物线 $y = ax^2$ 的对称轴是 y 轴, 顶点是原点. 当 $a > 0$ 时, 抛物线的开口向上, 顶点是抛物线的最低点; 当 $a < 0$ 时, 抛物线的开口向下, 顶点是抛物线的最高点. $|a|$ 越大, 抛物线的开口越小.

从二次函数 $y = ax^2$ 的图象可以看出: 如果 $a > 0$, 那么当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小, 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大; 如果 $a < 0$, 那么当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而增大, 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小.

练习

1. 在同一平面直角坐标系中, 画出下列二次函数的图象:

(1) $y = 3x^2$;

(2) $y = -3x^2$.

2. 说出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点, 以及随着 x 的增大, y 的变化情况:

(1) $y=4x^2$; (2) $y=-4x^2$; (3) $y=\frac{1}{4}x^2$; (4) $y=-\frac{1}{4}x^2$.

26.2.2 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

在研究了 $y=ax^2$ 的图象和性质之后, 我们进一步探讨当 b, c 不全为 0 时, 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质. 如何研究呢? 能否将 $y=ax^2+bx+c$ 转化为类似 $y=ax^2$ 的简单形式?

思考

回想一下, 上一章是如何通过配方法解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的? 由此, 你得到了什么启发?

通过配方, 可以将 “ ax^2+bx+c ” 转化为 “ $a(x-h)^2+k$ ” 的形式, 即将二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 转化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式. 当分别讨论 h, k 的取值时, 就可以建立起 $y=ax^2+bx+c$ 与 $y=ax^2$ 的联系了.

用 a, b, c 表示, 这里的 h 和 k 分别是什么?

先来讨论当 $h=0, k \neq 0$ 时, 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象和性质.

探究

(1) 在同一平面直角坐标系中, 画出二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2, y=\frac{1}{2}x^2-2$ 的图象, 并分别指出它们的开口方向、对称轴和顶点.

(2) 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+2, y=\frac{1}{2}x^2-2$ 与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 有什么关系?

先列表:

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y=\frac{1}{2}x^2+2$	...	10	6.5	4	2.5	2	2.5	4	6.5	10	...
$y=\frac{1}{2}x^2-2$	...	6	2.5	0	-1.5	-2	-1.5	0	2.5	6	...

然后描点画图, 就得到 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$, $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ 的图象(图 26.2-6).

可以看出, 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ 的开口向上, 对称轴是 y 轴, 顶点是 $(0, 2)$; 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ 的开口向上, 对称轴是 y 轴, 顶点是 $(0, -2)$.

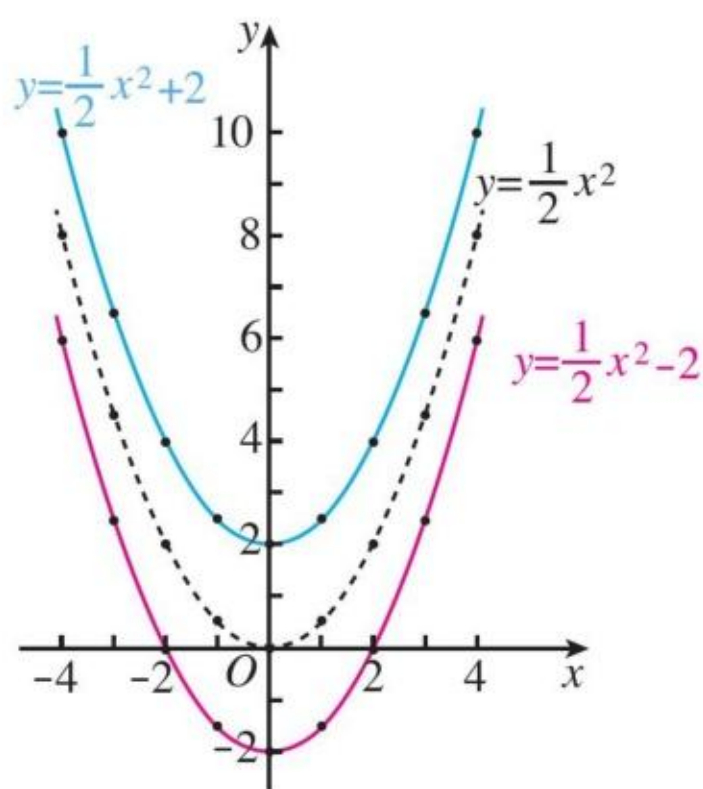


图 26.2-6

可以发现, 把抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ (图 26.2-6 中的虚线图形) 向上平移 2 个单位长度, 就得到抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$; 把抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 向下平移 2 个单位长度, 就得到抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

也可以利用信息技术工具画函数 $y = ax^2 + k$ 的图象 (不妨令 a 分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$). 改变 k 的值, 可以发现, 随着 k 的变化, 二次函数 $y = ax^2 + k$ 的图象在向上或向下平移, 即把抛物线 $y = ax^2$ 向上 ($k > 0$) 或向下 ($k < 0$) 平移 $|k|$ 个单位长度, 就得到抛物线 $y = ax^2 + k$ (图 26.2-7).

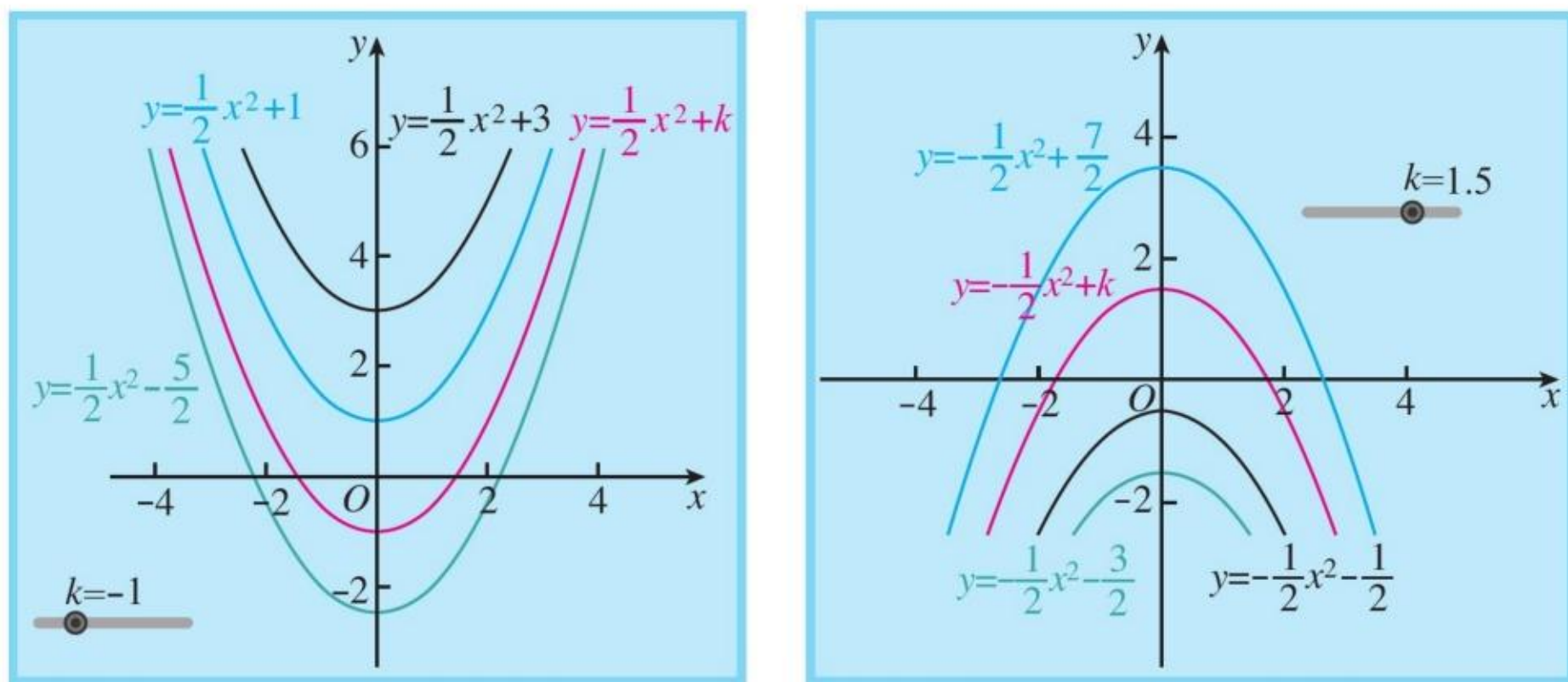


图 26.2-7

思考

你能归纳出二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象特征和性质吗？与同学交流一下.

练习

在同一平面直角坐标系中，画出下列二次函数的图象：

$$y=x^2, \quad y=x^2+1, \quad y=x^2-1.$$

指出三条抛物线的位置关系，并分别指出它们的开口方向、对称轴和顶点，以及随着 x 的增大， y 的变化情况.

再来讨论当 $h \neq 0, k=0$ 时，二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象和性质.

探究

(1) 在同一平面直角坐标系中，画出二次函数 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$, $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图象，并分别指出它们的开口方向、对称轴和顶点.

(2) 抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$, $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 有什么关系？

先分别列表：

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	...
$y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$	...	-4.5	-2	-0.5	0	-0.5	-2	-4.5	...

x	...	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$	...	-4.5	-2	-0.5	0	-0.5	-2	-4.5	...

然后描点画图，得到 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$, $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图象（图 26.2-8）.

可以看出，抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的开口向下，对称轴是经过点 $(-1, 0)$ 且

与 x 轴垂直的直线，把它记作 $x=-1$ ，顶点是 $(-1, 0)$ ；抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$

的开口向下，对称轴是 $x=1$ ，顶点是 $(1, 0)$ 。

可以发现，把抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ （图 26.2-8 中的虚线图形）向左平移 1 个单位长度，就得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ ；把抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向右平移 1 个单位长度，就得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 。

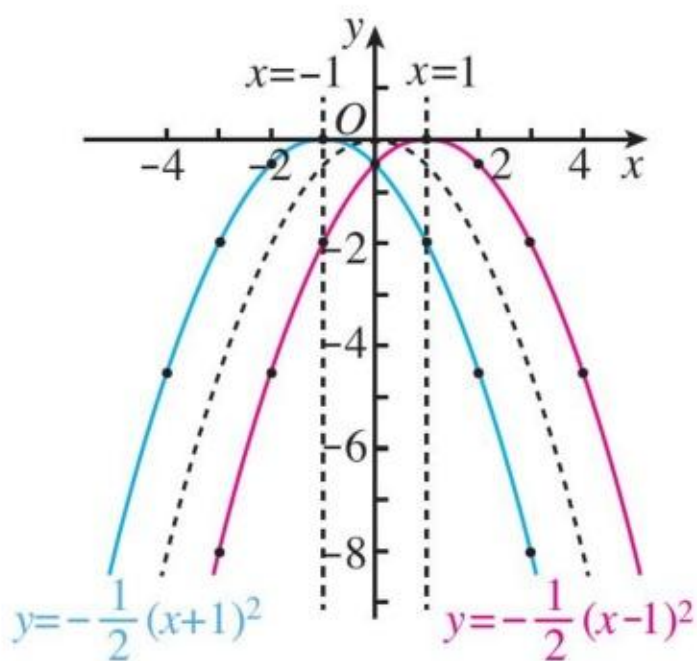


图 26.2-8

也可以利用信息技术工具画函数 $y = a(x-h)^2$ 的图象. 改变 h 的值，可以发现，随着 h 的变化，二次函数 $y = a(x-h)^2$ 的图象向左或向右平移，即把抛物线 $y = ax^2$ 向左 ($h < 0$) 或向右 ($h > 0$) 平移 $|h|$ 个单位长度，就可以得到抛物线 $y = a(x-h)^2$ （图 26.2-9）。

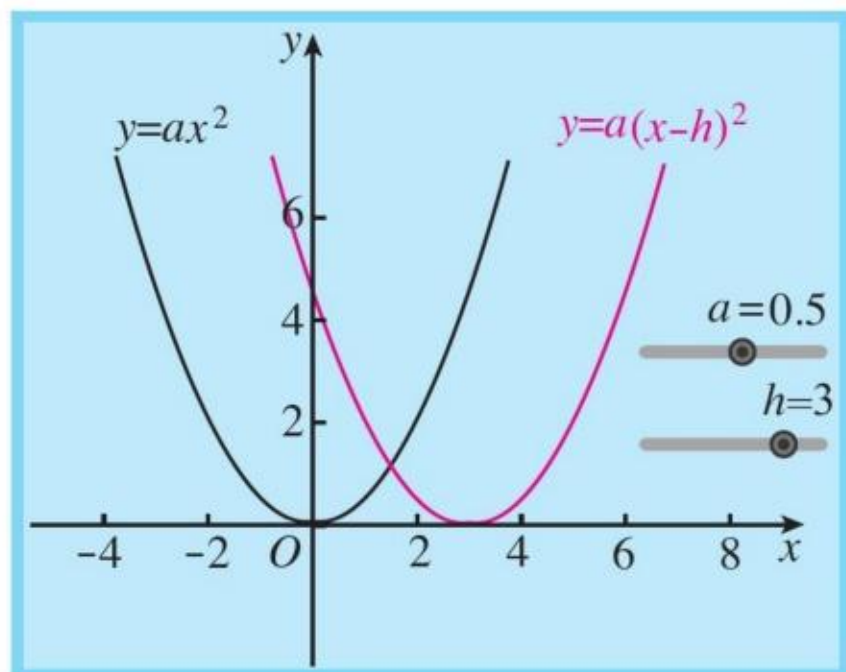
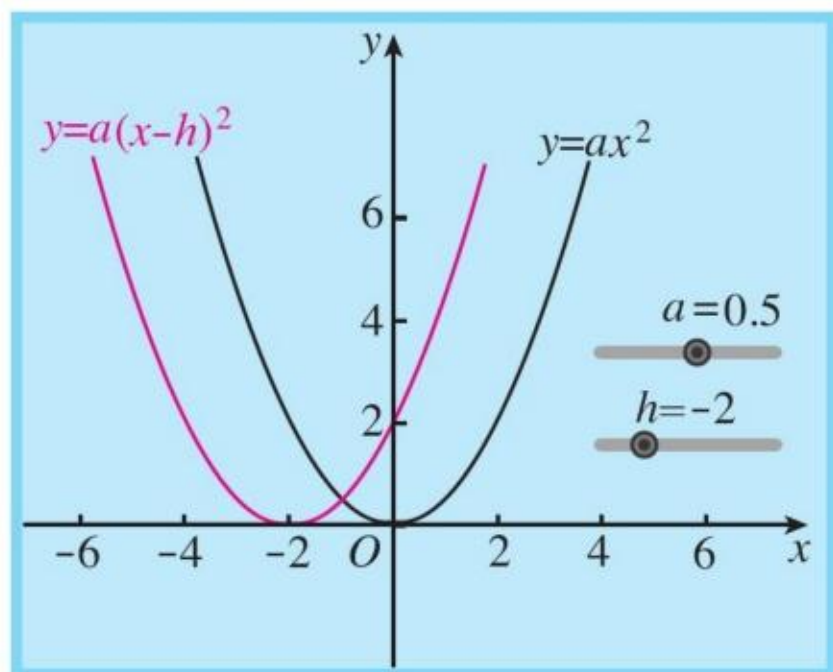


图 26.2-9

思考

你能归纳出二次函数 $y = a(x-h)^2$ 的图象特征和性质吗？与同学交流一下。

练习

在同一平面直角坐标系中，画出下列二次函数的图象：

$$y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = \frac{1}{2}(x+2)^2, \quad y = \frac{1}{2}(x-2)^2.$$

指出三条抛物线的位置关系，并分别指出它们的开口方向、对称轴和顶点，以及随着 x 的增大， y 的变化情况。

最后来讨论当 $h \neq 0$, $k \neq 0$ 时, 二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象和性质.

探究

- (1) 画出二次函数 $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$ 的图象, 并指出它的开口方向、对称轴和顶点.
- (2) 抛物线 $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$ 与抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 有什么关系?

如图 26.2-10, 抛物线 $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$ 的开口向下, 对称轴是 $x = -1$, 顶点是 $(-1, -1)$.

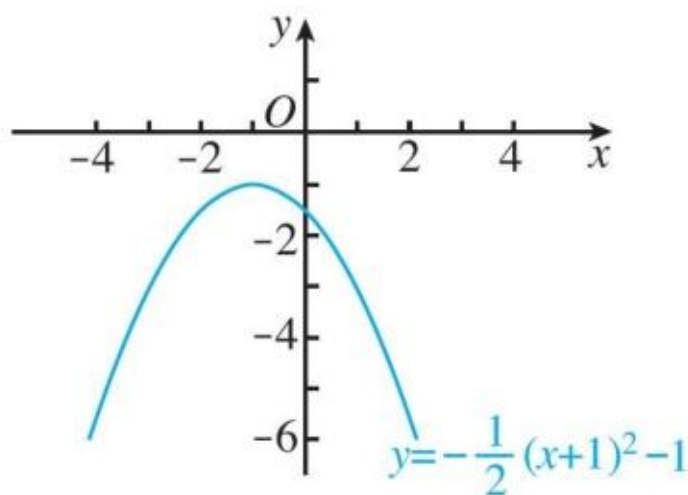


图 26.2-10

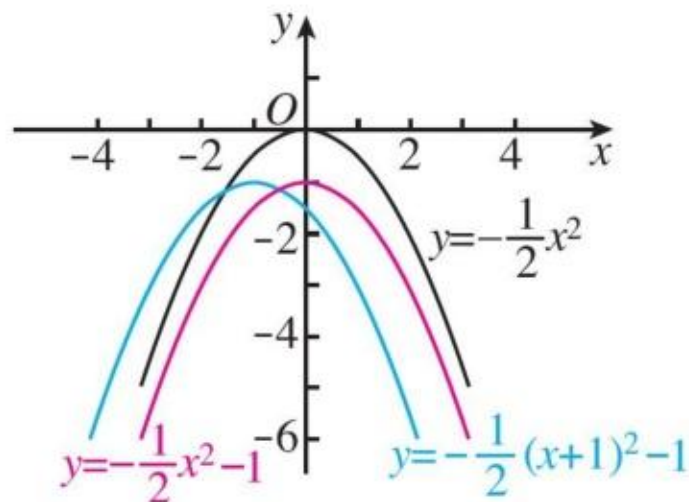


图 26.2-11

如图 26.2-11, 把抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 向下平移 1 个单位长度, 再向左平移 1 个单位长度, 就得到抛物线 $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$.

归纳

一般地, 抛物线 $y = a(x-h)^2 + k$ 与 $y = ax^2$ 形状相同, 位置不同. 把抛物线 $y = ax^2$ 向上(或向下)、向左(或向右)平移, 可以得到抛物线 $y = a(x-h)^2 + k$. 平移的方向、距离要根据 h, k 的值来决定.

抛物线 $y = a(x-h)^2 + k$ 有如下特点:

- (1) 当 $a > 0$ 时, 开口向上; 当 $a < 0$ 时, 开口向下.
- (2) 对称轴是 $x = h$.
- (3) 顶点是 (h, k) .

从二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象可以看出: 如果 $a > 0$, 那么当 $x < h$ 时, y 随 x 的增大而减小, 当 $x > h$ 时, y 随 x 的增大而增大, 当 $x = h$ 时, y

取最小值，最小值为 k ；如果 $a < 0$ ，那么当 $x < h$ 时， y 随 x 的增大而增大，当 $x > h$ 时， y 随 x 的增大而减小，当 $x = h$ 时， y 取最大值，最大值为 k 。

我们来看一个与章前图有关的问题。

例 2 要修建一个圆形喷水池，在池中心竖直安装一根水管，在水管的顶端安一个喷水头，使喷出的抛物线形水柱在与池中心的水平距离为 1.6 m 处达到最高，高度为 3 m，水柱落地处离池中心 3.6 m，水管的长应为多少？

解：如图 26.2-12，以水管与地面交点为原点，原点与水柱落地处所在直线为 x 轴，水管所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系。

点 $(1.6, 3)$ 是图中这段抛物线的顶点，因此可设这段抛物线对应的函数解析式为

$$y = a(x - 1.6)^2 + 3 \quad (0 \leq x \leq 3.6).$$

由这段抛物线经过点 $(3.6, 0)$ ，可得

$$0 = a(3.6 - 1.6)^2 + 3.$$

解得

$$a = -\frac{3}{4}.$$

因此

$$y = -\frac{3}{4}(x - 1.6)^2 + 3 \quad (0 \leq x \leq 3.6).$$

当 $x = 0$ 时， $y = 1.08$ ，也就是说，水管的长应为 1.08 m。

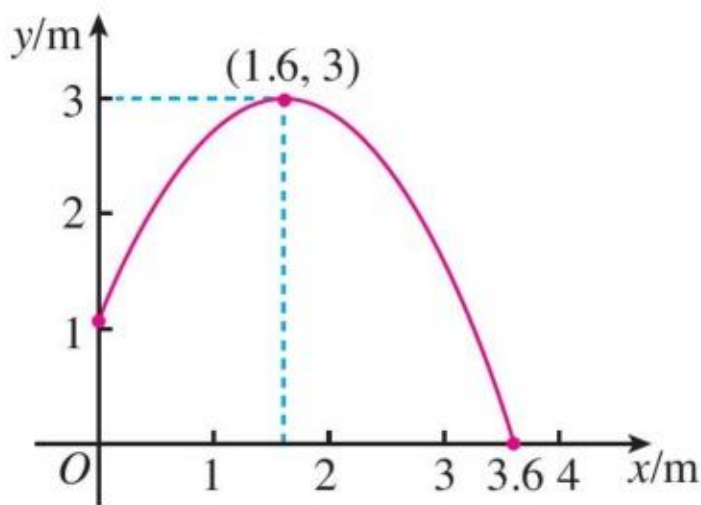


图 26.2-12

练习

1. 说出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点，以及随着 x 的增大， y 的变化情况：

(1) $y = 2(x + 3)^2 + 5$;

(2) $y = -3(x - 1)^2 - 2$;

(3) $y = 4(x - 3)^2 + 7$;

(4) $y = -5(x + 2)^2 - 6$.

2. 说出下列二次函数的最大值或最小值：

(1) $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 2$;

(2) $y = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$.

26.2.3 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

从简单的二次函数 $y=ax^2$ 开始, 我们逐步深入, 研究了二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质. 我们还知道, 通过配方, 可以将二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 转化为 $y=a(x-h)^2+k$. 这样, 就可以利用 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质来研究二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质.

先来看一个具体的例子.

思考

对于二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$, 如何画出它的图象并讨论它的性质?

对二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 配方, 可得 $y=\frac{1}{2}(x-6)^2+3$. 根据前面的学习, 可以先画出二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象, 然后把这个图象向右平移 6 个单位长度, 再向上平移 3 个单位长度, 就得到二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 的图象.

还有其他平移方法吗?

如果直接画二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 的图象, 可按如下步骤进行.

由配方的结果可知, 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 的顶点是 $(6, 3)$, 对称轴是 $x=6$.

先利用图象的对称性列表:

x	...	3	4	5	6	7	8	9	...
$y=\frac{1}{2}(x-6)^2+3$	...	7.5	5	3.5	3	3.5	5	7.5	...

然后描点画图, 得到 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 的图象

(图 26.2-13).

从二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 的图象可以看出: 在对称轴的左侧, 抛物线从左到右下降; 在对称轴的右侧, 抛物线从左到右上升. 也就是说, 当 $x<6$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $x>6$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $x=6$ 时, y 取最小值, 最小值是 3.

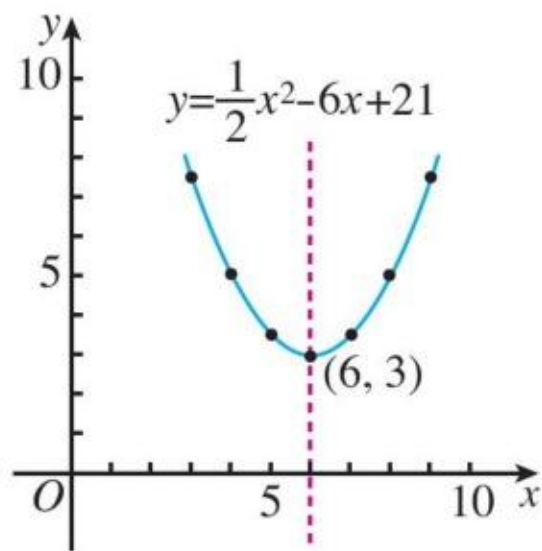


图 26.2-13

探究

你能用上面的方法研究二次函数 $y = -2x^2 - 4x + 1$ 的图象和性质吗?

一般地, 我们可以类似地研究二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象和性质.

通过配方, 可以将二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 化成

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

因此, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴是 $x = -\frac{b}{2a}$, 顶点是 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

如图 26.2-14, 从二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象可以看出:

如果 $a > 0$, 那么当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而减小, 当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而增大;

如果 $a < 0$, 那么当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而增大, 当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而减小.

因此, 当 $a > 0$ (或 $a < 0$) 时, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点是最低点 (或最高点). 也就是说, 当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 有最小值 (或最大值) $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

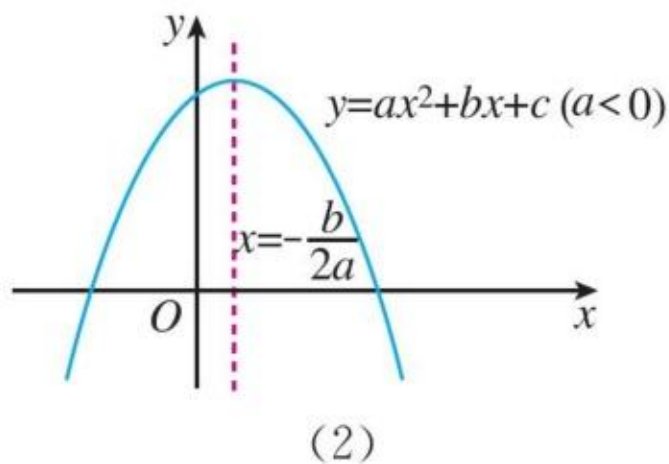
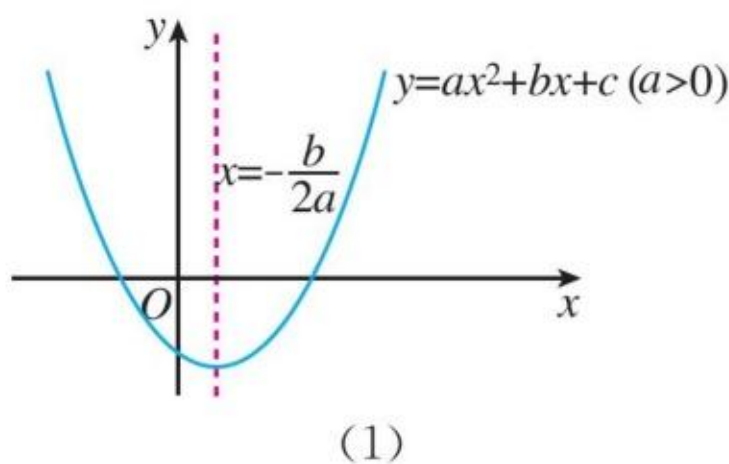


图 26.2-14

练习

1. 先确定下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点, 说出随着 x 的增大, y 的变化情况, 再描点画图:

(1) $y = -3x^2 + 12x - 3$;

(2) $y = 4x^2 - 24x + 26$;

$$(3) y=2x^2+8x-6;$$

$$(4) y=\frac{1}{2}x^2-2x-1.$$

2. 求下列函数的最大值或最小值:

$$(1) y=3x^2+2x;$$

$$(2) y=-2x^2+8x-8.$$

习题 26.2

复习巩固

1. 在同一平面直角坐标系中, 画出下列二次函数的图象, 并写出其开口方向、对称轴和顶点, 以及随着 x 的增大, y 的变化情况:

$$(1) y=5x^2;$$

$$(2) y=-\frac{1}{5}x^2.$$

2. 分别在同一平面直角坐标系中, 画出下列各组二次函数的图象, 并写出其对称轴和顶点:

$$(1) y=-\frac{1}{3}x^2+3, y=-\frac{1}{3}x^2-2;$$

$$(2) y=\frac{1}{4}(x-3)^2, y=\frac{1}{4}(x+1)^2;$$

$$(3) y=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-5, y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1.$$

3. 先确定下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点, 说出随着 x 的增大, y 的变化情况, 再描点画图:

$$(1) y=x^2+2x-5;$$

$$(2) y=-2x^2+6x+3;$$

$$(3) y=2x^2+4x-5;$$

$$(4) y=-\frac{1}{4}x^2+2x-3.$$

4. 求下列二次函数的最大值或最小值:

$$(1) y=5x^2+3x+2;$$

$$(2) y=-x^2+6x-3;$$

$$(3) y=-\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{5}{2};$$

$$(4) y=\frac{1}{4}x^2-2x+5.$$

5. 已知抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 的顶点为 $(5, \frac{17}{2})$, 求 b, c 的值.

综合运用

6. 填空:

(1) 在平面直角坐标系中, 把抛物线 $y=-3(x-2)^2-5$ 先向上平移 5 个单位长度, 再向左平移 2 个单位长度, 所得抛物线对应的函数解析式为_____;

(2) 在平面直角坐标系中, 把抛物线 $y=2x^2+4x+3$ 先向下平移 1 个单位长度, 再向右平移 1 个单位长度, 所得抛物线对应的函数解析式为_____.

7. 如图, 一名足球运动员在点 A 处踢出任意球, 球的飞行路线是一条抛物线. 当球飞行到最高点时, 恰好击中 2.44 m 高的球门横梁上的点 B . 设位于点 B 正下方的地面上的点为 C , 且 $AC=24.4\text{ m}$. 求这一飞行过程中, 球的竖直高度 y (单位: m) 关于它距离点 A 的水平距离 x (单位: m) 的函数解析式.



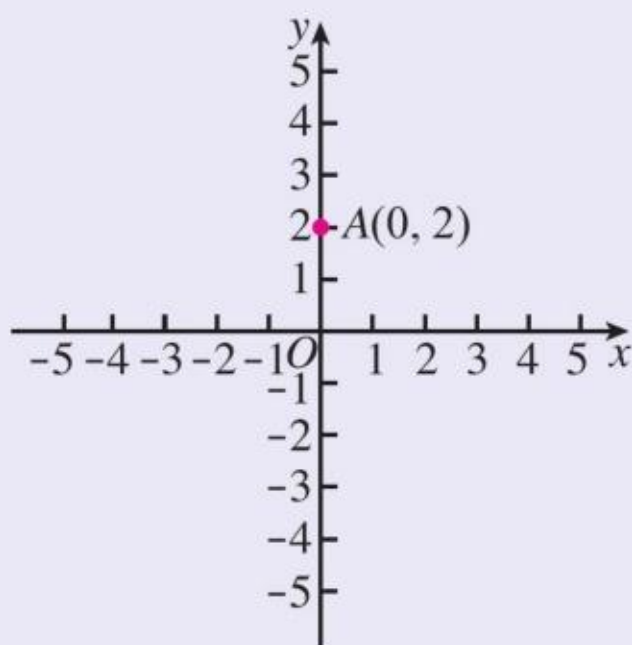
(第 7 题)

拓展探索

8. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $(-1, -22)$, $(0, -8)$, $(2, 8)$ 三点, 求它的开口方向、对称轴和顶点.

9. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 A 的坐标是 $(0, 2)$. 在 x 轴上任取一点 M , 并按以下步骤作图:

- ①连接 AM , 作线段 AM 的垂直平分线 l_1 , 过点 M 作 x 轴的垂线 l_2 , 记 l_1, l_2 的交点为 P ;
- ②在 x 轴上多次改变点 M 的位置, 用①的方法得到相应的点 P , 再用平滑的曲线连接这些点, 记为曲线 l .



(第 9 题)

解答如下问题:

- (1) 对于曲线 l 上任意一点 P , 线段 PA 与 PM 有什么关系?
- (2) 设点 P 的坐标是 (x, y) , 根据 (1) 的结论求 x, y 满足的关系式. 你能由此确定曲线 l 是哪种曲线吗? (提示: 根据勾股定理, 用含 x, y 的式子表示线段 PA 的长.)

26.3 二次函数与一元二次方程

以前我们从一次函数的角度看一元一次方程，认识了一次函数与一元一次方程的联系. 类似地，可以从二次函数的角度看一元二次方程，认识二次函数与一元二次方程的联系.

思考

如图 26.3-1，下列二次函数的图象与 x 轴有公共点吗？如果有，公共点的横坐标是多少？当 x 取公共点的横坐标时，函数值是多少？

- (1) $y = x^2 + x - 2$;
- (2) $y = x^2 - 8x + 16$;
- (3) $y = x^2 - x + 1$.

由此，你能说说方程

$$x^2 + x - 2 = 0, x^2 - 8x + 16 = 0, x^2 - x + 1 = 0$$

的根的情况吗？

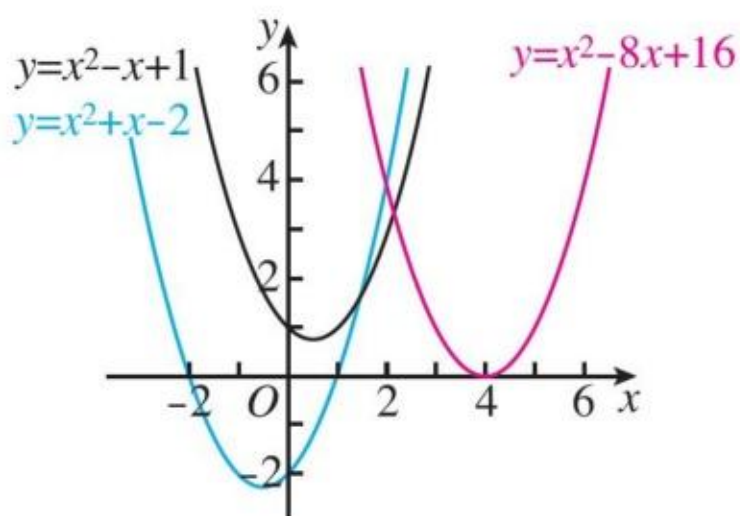


图 26.3-1

通过图 26.3-1 中的函数图象可以看出：

(1) 抛物线 $y = x^2 + x - 2$ 与 x 轴有两个公共点，它们的横坐标分别是一2，1. 当 x 取公共点的横坐标时，函数值是 0. 由此可知，方程 $x^2 + x - 2 = 0$ 有两个不相等的实数根 -2，1.

(2) 抛物线 $y = x^2 - 8x + 16$ 与 x 轴只有一个公共点，这个点的横坐标是 4. 当 $x = 4$ 时，函数值是 0. 由此可知，方程 $x^2 - 8x + 16 = 0$ 有两个相等的实数根 4.

(3) 抛物线 $y = x^2 - x + 1$ 与 x 轴没有公共点. 由此可知，方程 $x^2 - x + 1 = 0$ 没有实数根.

反过来，由一元二次方程的根的情况，也可以确定相应二次函数的图象与 x 轴的公共点的情况.

归纳

一般地，从二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，可得如下结论：

(1) 如果抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有公共点，公共点的横坐标是 x_0 ，那么当 $x=x_0$ 时，函数值是 0，因此 $x=x_0$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根.

(2) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的公共点的情况有三种：没有公共点，有一个公共点，有两个公共点. 它们分别对应着一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的三种情况：没有实数根，有两个相等的实数根，有两个不相等的实数根.

根据二次函数与一元二次方程的联系，可以将二次函数问题转化为相应的一元二次方程问题. 下面来看一个实际问题.

例 1 如图 26.3-2，以 40 m/s 的速度将小球沿与地面成 30° 角的方向击出时，小球的飞行路线将是一条抛物线. 小球的飞行高度 h (单位：m) 与飞行时间 t (单位：s) 的关系近似为 $h=20t-5t^2$. 小球的飞行高度能否达到 20 m? 如果能，需要多长时间?

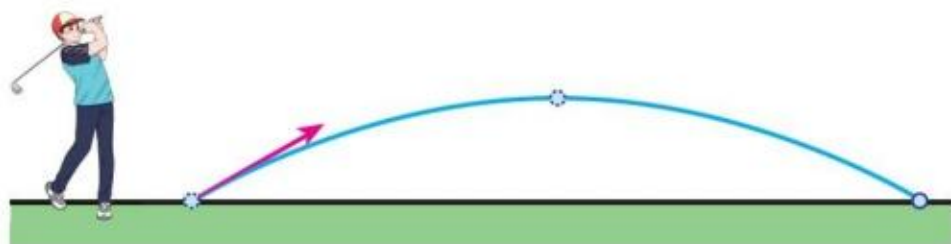


图 26.3-2

分析：问题“小球的飞行高度能否达到 20 m”即“二次函数 $h=20t-5t^2$ 的函数值能否取 20”，由二次函数与一元二次方程的关系，可转化为讨论一元二次方程 $20=20t-5t^2$ 的根的问题.

解：当 $h=20$ 时，由函数关系 $h=20t-5t^2$ ，列得方程

$$20=20t-5t^2,$$

即

$$t^2-4t+4=0.$$

解方程，得

$$t_1=t_2=2.$$

这说明，当自变量 $t=2$ 时，二次函数 $h=20t-5t^2$ 的函数值为 20，即当小球飞行 2 s 时，它的飞行高度为 20 m.

练习

关于例 1，回答下列问题：

- (1) 小球的飞行高度能否达到 15 m？如果能，需要多长时间？
- (2) 小球的飞行高度能否达到 20.5 m？如果能，需要多长时间？
- (3) 小球从飞出到落地，需要多长时间？

根据二次函数与一元二次方程的联系，也可以将一元二次方程问题转化为相应的二次函数问题. 不妨来看下面的问题.

例 2 利用函数图象求方程 $x^2 - 2x - 2 = 0$ 的根的近似值（结果保留小数点后一位）.

解：画出函数 $y = x^2 - 2x - 2$ 的图象（图 26.3-3），它与 x 轴的公共点的横坐标大约是一 0.7，2.7.

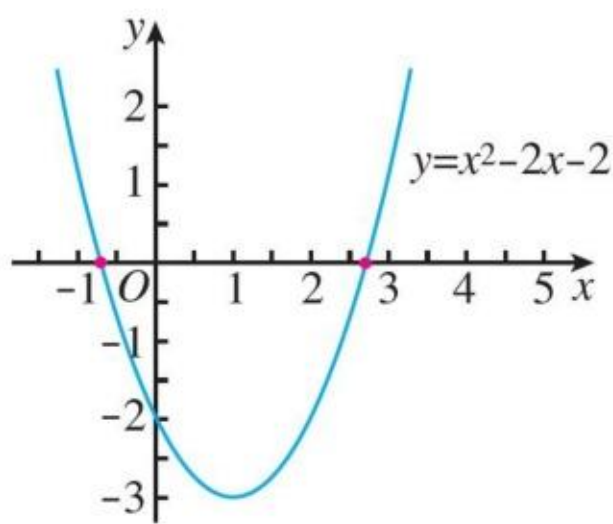


图 26.3-3

由于画图或观察可能存在误差，所以由函数图象求得的相应方程的根，一般是近似的.

所以方程 $x^2 - 2x - 2 = 0$ 的实数根为

$$x_1 \approx -0.7, x_2 \approx 2.7.$$

我们还可以通过不断缩小根所在的范围，估计一元二次方程的根.

观察函数 $y = x^2 - 2x - 2$ 的图象，可以发现：点 (2, -2) 在 x 轴的下方，即当自变量为 2 时的函数值小于 0，点 (3, 1) 在 x 轴的上方，即当自变量为 3 时的函数值大于 0. 因为抛物线 $y = x^2 - 2x - 2$ 是一条连续不断的曲线，所以抛物线 $y = x^2 - 2x - 2$ 在 $2 < x < 3$ 这一段经过 x 轴. 也就是说，当自变量取 2，3 之间的某个值时，函数值为 0，即方程 $x^2 - 2x - 2 = 0$ 在 2，3 之间有根.

我们可以通过取平均数的方法不断缩小根所在的范围. 例如，取 2，3 的平均数 2.5，用计算器算得自变量为 2.5 时的函数值为 -0.75，与自变量为 3

时的函数值异号, 所以这个根在 2.5, 3 之间. 再取 2.5, 3 的平均数 2.75, 用计算器算得自变量为 2.75 时的函数值为 0.062 5, 与自变量为 2.5 时的函数值异号, 所以这个根在 2.5, 2.75 之间.

重复上述步骤, 我们逐步得到: 这个根在 2.625, 2.75 之间, 在 2.687 5, 2.75 之间……可以看到: 根所在的范围越来越小, 根所在范围的两端的值越来越接近根的值, 因而可以作为根的近似值. 例如, 当要求根的近似值与根的准确值的差的绝对值小于 0.1 时, 由于 $|2.687\ 5 - 2.75| = 0.062\ 5 < 0.1$, 我们可以将 2.687 5 作为根的近似值.

你能用这种方法得出方程 $x^2 - 2x - 2 = 0$ 的另一个根的近似值吗 (要求根的近似值与根的准确值的差的绝对值小于 0.1)?

这种求根的近似值的方法也适用于更高次的一元方程.

练习

利用函数图象求下列方程根的近似值 (结果保留小数点后一位):

(1) $x^2 - 3x + 1 = 0$; (2) $-x^2 - x + 1 = 0$.

习题 26.3

复习巩固

- 已知函数 $y = x^2 - x - 2$.
 - 画出这个函数的图象;
 - 观察图象, 当 x 取哪些值时, 函数值为 0?
- 利用函数图象求下列方程的根的近似值 (结果保留小数点后一位):
 - $x^2 - 6x + 7 = 0$; (2) $-x^2 + 3x + 1 = 0$.

综合运用

- 下列函数的图象与 x 轴是否有公共点? 如果有公共点, 写出公共点的坐标.
 - $y = 3x^2 - 6x + 9$; (2) $y = 2x^2 - 4x - 6$.
- 一辆汽车在一段时间内加速行驶, 测得行驶路程 l (单位: m) 关于行驶时间 t (单位: s) 的函数解析式是 $l = 9t + \frac{1}{2}t^2$, 经过 10 s 汽车行驶了多远? 行驶 180 m 需要多长时间?

拓广探索

5. 画出函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象, 利用图象回答:

(1) 方程 $x^2-2x-3=0$ 的根是多少?

(2) x 取什么值时, 函数值大于 0?

(3) x 取什么值时, 函数值小于 0?

6. 如果 $a>0$, 下列情形时, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点在什么位置?

(1) 方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根;

(2) 方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根;

(3) 方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实数根.

如果 $a<0$ 呢?

26.4 实际问题与二次函数

对于某些实际问题，如果其中变量之间的关系可以用二次函数来刻画，那么就可以利用二次函数的图象和性质对其进行研究.

例 1 在一次跳水运动中，某运动员的重心相对于水面的高度 h （单位：m）与起跳后的时间 t （单位：s）之间的关系式是 $h = -4.9t^2 + 2.8t + 11$. 运动员起跳后经过多长时间达到最高点？运动员跳水过程中重心的最大高度是多少？（结果保留小数点后一位.）

分析：运动员在跳水过程中重心的高度是时间的二次函数，于是最大高度问题转化为求二次函数的最大值问题，而何时达到最高点问题，转化为二次函数取最大值时自变量的取值问题.

解：对于二次函数 $h = -4.9t^2 + 2.8t + 11$ ，当

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{2.8}{2 \times (-4.9)} \approx 0.3$$

时， h 有最大值

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times (-4.9) \times 11 - 2.8^2}{4 \times (-4.9)} = 11.4.$$

因此，运动员起跳后大约 0.3 s 时，其重心达到最高点，最大高度为 11.4 m.

函数 $h = -4.9t^2 + 2.8t + 11$ 的图象(图 26.4-1)，直观地反映了运动员跳水过程中重心高度的变化，由此你能描述运动员在竖直方向上的运动过程吗？

例 2 如图 26.4-2，利用一面墙（墙的长度不限），用 20 m 长的篱笆围成一个矩形菜园. 如何围才能使菜园的面积最大？最大面积是多少？

分析：菜园面积是一边长的函数，设一边长为 x m，由矩形的面积公式可得函数解析式，于是菜园的面积最大问题转化为函数的最大值问题.

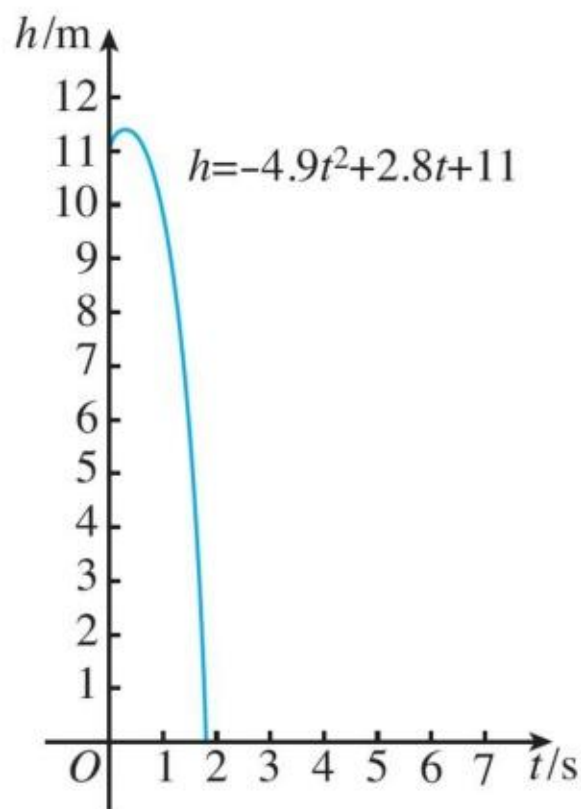


图 26.4-1

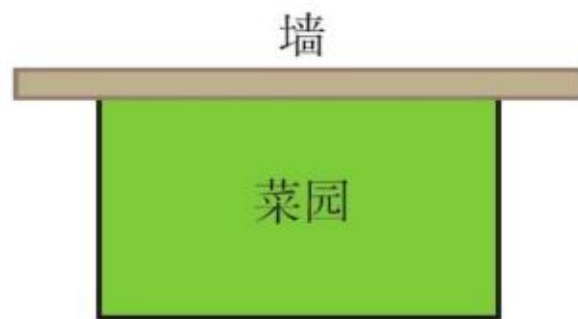


图 26.4-2

解：设垂直于墙的边长为 x m，则平行于墙的边长为 $(20-2x)$ m，矩形菜园的面积

$$S = x(20-2x),$$

即

$$S = -2x^2 + 20x \quad (0 < x < 10).$$

当 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2 \times (-2)} = 5$ 时， S 有最大值

$$\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{-20^2}{4 \times (-2)} = 50.$$

因此，当垂直于墙的边长为 5 m 时，这个矩形菜园的面积最大，最大面积为 50 m^2 .

在实际问题中，函数自变量的取值应使问题有现实意义. 如菜园的边长应为正数，即 $x > 0$ ，且 $20-2x > 0$ ，于是自变量 x 的取值范围是 $0 < x < 10$.

练习

1. 如果例 2 中墙的长度为 8 m，如何围才能使菜园的面积最大？最大面积是多少？
2. 从地面竖直向上抛出一小球，小球的高度 h （单位：m）与小球的运动时间 t （单位：s）的关系近似为 $h = 30t - 5t^2$ ($0 \leq t \leq 6$). 小球运动的时间是多少时，小球最高？小球运动中的最大高度是多少？

利用二次函数的性质，可以解决生活中的一些最大值（或最小值）问题，如例 1 的最大高度，例 2 的最大面积. 下面我们再来看一个最大利润问题.

探究 1

某商品现在的售价为每件 60 元，每星期可卖出 300 件. 市场调查反映，若调整单价（单价为整数）：每涨价 1 元，则每星期要少卖出 10 件；每降价 1 元，则每星期可多卖出 20 件. 已知商品的进价为每件 40 元，如何定价才能使利润最大？最大利润是多少？

分析：调整价格包括涨价和降价两种情况，先来看涨价的情况.

(1) 设每件涨价 x 元，则每星期售出商品的利润 y 随之变化. 我们先来确定 y 随 x 变化的函数解析式.

每件涨价 x 元时, 每星期要少卖 $10x$ 件, 实际卖出 $(300-10x)$ 件, 销售额为 $(60+x)(300-10x)$ 元, 买进商品需付 $40(300-10x)$ 元. 因此, 所得利润

$$y = (60+x)(300-10x) - 40(300-10x),$$

即

$$y = -10x^2 + 100x + 6\,000,$$

其中, $0 \leq x \leq 30$, x 为整数.

根据上面的函数, 填空:

当 $x = \underline{\quad}$ 时, y 最大, 也就是说, 在涨价的情况下, 涨价 $\underline{\quad}$ 元, 即定价 $\underline{\quad}$ 元时, 利润最大, 最大利润是 $\underline{\quad}$ 元.

(2) 在降价的情况下, 最大利润是多少? 请你参考 (1) 的讨论求解.

由 (1) (2) 的讨论及现在的销售状况, 你知道如何定价才能使利润最大了吗?

练习

1. 旅行社开设一旅游团, 20 人起组团, 每人需缴费 2 100 元. 旅行社对超过 20 人的旅行团给予优惠: 每增加 1 人, 每人需缴费用降低 30 元. 当旅行团的人数为多少时, 旅行社可获得最大营业额? 最大营业额是多少?
2. 生产某种商品需要 500 元的固定花费, 在此基础上, 每生产 1 件商品花费 10 元, 预定单价为 50 元, 实际单价随产量的增加而下调, 下调幅度为产量的八分之一. 当产量为何值时, 生产这种商品的利润最大? 最大利润是多少?

二次函数在生活中应用广泛, 除了之前的最大值 (或最小值) 问题, 我们再来看其他一些应用二次函数来解决的实际问题.

探究2

一座抛物线形拱桥如图 26.4-3 所示, 当拱顶离水面 4 m 时, 水面宽 10 m. 突降暴雨后水面上升 1 m, 此时水面宽为多少 (结果保留小数点后一位)?

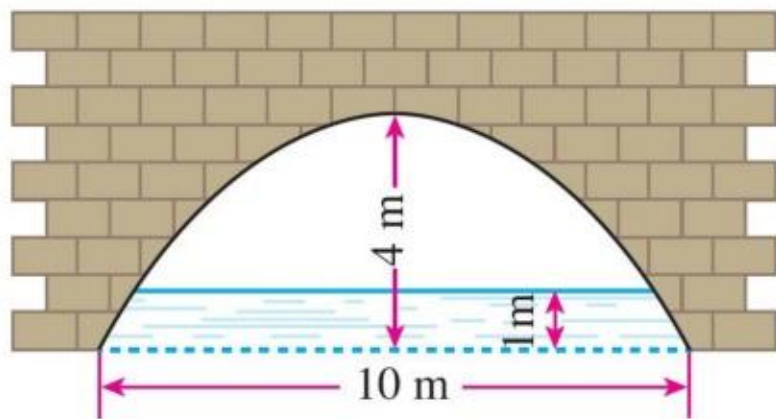


图 26.4-3

分析：二次函数的图象是抛物线，建立适当的平面直角坐标系，就可以根据已知条件求出这条抛物线对应的二次函数，进而解决问题. 为简单起见，以抛物线的顶点为原点，以抛物线的对称轴为 y 轴，建立平面直角坐标系（图 26.4-4）.

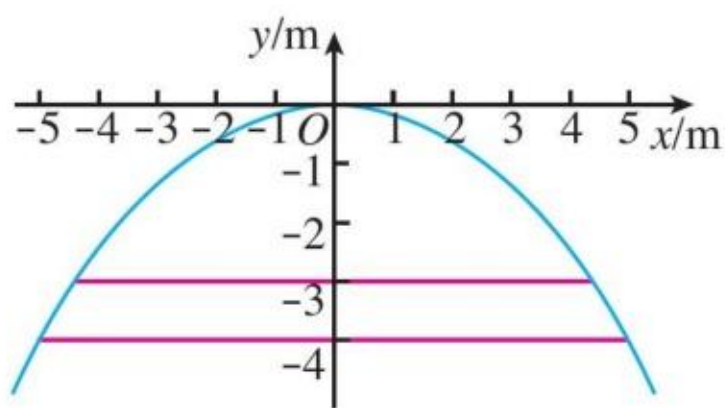


图 26.4-4

设这条抛物线表示的二次函数为 $y = ax^2$.

由抛物线经过点 $(5, -4)$ ，可得

$$-4 = a \times 5^2.$$

解得

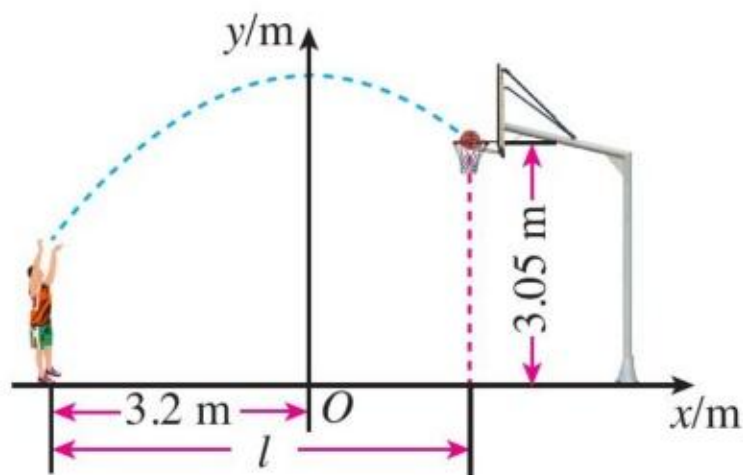
$$a = -\frac{4}{25}.$$

因此，这条抛物线对应的二次函数为 $y = -\frac{4}{25}x^2$.

当水面上升 1 m 时，水面的纵坐标为 -3 . 请你根据上面的函数解析式求出这时水面的宽度.

练习

1. 在一名运动员的某次投篮中，篮球的运动路线是抛物线 $y = -0.2x^2 + 3.85$ 的一部分（如图），若篮球投入篮筐，求运动员到篮筐正下方的距离 l .



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 对于探究 2，在突降暴雨致水位上升 1 m 后，有一艘装有物资的船准备从桥下通过，船身及物资外形如图所示. 这艘船宽 4 m，物资顶部为长方形，且物资顶部距水面 2 m. 这艘船能从这座拱桥下通过吗？

习题 26.4



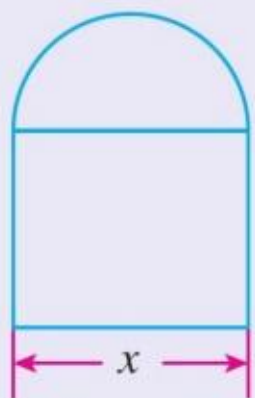
复习巩固

1. 刘伟在练习原地垂直起跳. 某次起跳后, 他的脚离开地面的距离 y (单位: m) 关于起跳后的时间 t (单位: s) 的函数解析式大致为 $y = -5t^2 + 3.6t$. 求刘伟跳到最高点时脚离开地面的距离.
2. 若汽车刹车后行驶的距离 l (单位: m) 关于行驶的时间 t (单位: s) 的函数解析式为 $l = 15t - 6t^2$. 汽车从刹车到停下来, 前进了多远?
3. 点燃某种烟花后, 其升空高度 h (单位: m) 关于时间 t (单位: s) 的函数可近似表示为 $h = 39t - 5t^2 (t \geq 0)$. 若这种烟花在点燃升空后到最高处引爆, 烟花点燃多久后引爆? 烟花升空的最高高度是多少?
4. 用总长 l (单位: m) 的篱笆围成矩形场地, 矩形场地的面积 S (单位: m^2) 随矩形场地一边长 a (单位: m) 的变化而变化. 当 a 是多少米时, 场地的面积 S 最大? 最大面积是多少? 此时的场地是什么形状?

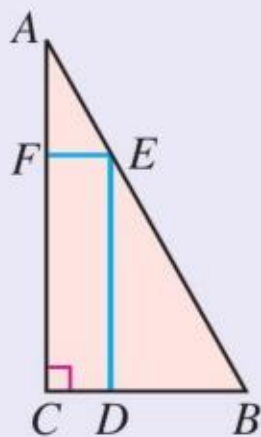


综合运用

5. 如图, 用长为 6 m 的材料做一个上部为半圆、下部为矩形的窗框. 底部宽 x (单位: m) 为多少时, 窗户的透光面积 S (单位: m^2) 最大 (结果保留小数点后一位)?



(第 5 题)



(第 6 题)

6. 一块三角形材料如图所示, $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 12$ cm. 用这块材料剪出一个矩形 $CDEF$, 其中, 点 D , E , F 分别在 BC , AB , AC 上. 要使剪出的矩形 $CDEF$ 的面积最大, 点 E 应选在何处?
7. 某宾馆有 50 个房间供游客居住. 当每间房定价为 180 元/天时, 房间会全部住满; 当每间房定价每增加 10 元/天时, 就会增加一个空闲房间. 如果游客居住

房间，宾馆需对每间房支出 20 元/天的各种费用. 房价定为多少时，宾馆利润最大？

8. 某商店销售一种成本为 40 元/kg 的水产品，若按 50 元/kg 销售，一个月可售出 500 kg. 当销售价格 x (x 为整数，单位：元/kg) 每上涨 1 元/kg 时，月销售量就减少 10 kg.

- (1) 写出月销售利润 y (单位：元) 与销售价格 x 之间的函数解析式.
- (2) 当销售价格为 55 元/kg 时，计算出月销售量和销售利润.
- (3) 商店计划使月销售利润为 8 000 元，销售价格应定为多少？
- (4) 当销售价格定为多少时会获得最大利润？求出最大利润.

9. 如图，三孔桥横截面的三个孔都呈抛物线形，两小孔形状、大小都相同. 正常水位时，大孔水面宽度为 20 m，顶点距水面 8 m，小孔顶点距水面 5 m. 求当水位上涨至刚好淹没小孔时，大孔的水面宽度 (结果保留小数点后一位).



(第 9 题)

拓展探索

10. 分别用定长为 l 的线段围成矩形和圆，哪种图形的面积更大？为什么？

阅读与思考

生活中的抛物线

生活中经常可见抛物线的“身影”，当你用数学的眼光观察时，就会发现它们. 图 1 中滑雪运动员起跳后在空中飞行的路线，图 2 中跨江大桥的造型……它们都形似抛物线.



图 1



图 2

除了“形”为抛物线，生活中还有很多物品的设计“用”到了抛物线. 因为抛物线有一条重要性质：平行于抛物线对称轴的光线照射到抛物线上，光线经反射后集中于对称轴上的一点，这一点被称为焦点（图 3）. 太阳灶就是利用这一性质设计的，如图 4 所示. 太阳灶上装有一个反光镜，镜面的形状是一个由抛物线绕它的对称轴旋转得到的曲面，这种曲面叫作抛物面. 当抛物面的轴与太阳光线平行时，太阳光线经过反射后集中于焦点处，这一点的温度就会很高，可以用来加热食物. 由于光的可逆性，也可以使从抛物线焦点处发出的光线，经抛物线反射后平行于抛物线的对称轴射出（图 5）. 手电筒、探照灯等就是利用这个原理设计的.

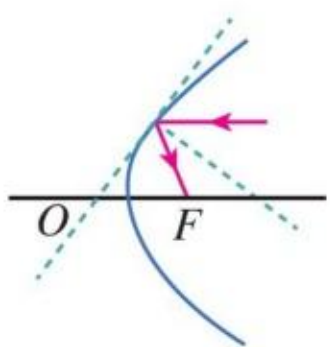


图 3



图 4

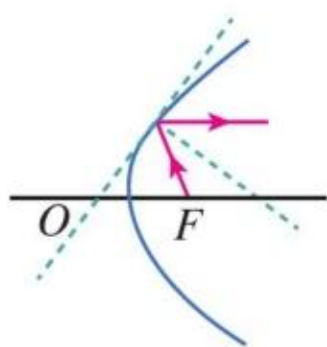


图 5

抛物面的光学性质也可以应用到电磁波上. 人们把射电望远镜的天线制成抛物面，将来自宇宙的电磁波聚集在焦点处. 2016 年 9 月 25 日在贵州落成启用的“中国天眼”——500 m 口径球面射电望远镜（FAST 工程），当接收电磁波时，其反射面主体就会调整变形为一个抛物面（图 6）.



图 6

作为目前世界上最大、最灵敏的单口径射电望远镜，“中国天眼”能够接收到 100 多亿光年以外的电磁信号，是中国科技创新的一张代表性名片.

现在，请你用数学的眼光来发现生活中的抛物线，以及应用抛物线性质设计的物品吧！

数学活动

活动1 哪个积最大

(1) 观察下列两个两位数的积（两个乘数的十位上的数字都是9，个位上的数字的和等于10），猜想其中哪个积最大：

$$91 \times 99, 92 \times 98, \dots, 98 \times 92, 99 \times 91.$$

(2) 观察下列两个三位数的积（两个乘数的百位上的数字都是9，十位上的数字与个位上的数字组成的数的和等于100），猜想其中哪个积最大：

$$901 \times 999, 902 \times 998, \dots, 998 \times 902, 999 \times 901.$$

对于(1)(2)，你能用二次函数的知识说明你的猜想正确吗？

活动2 刹车距离与刹车时车速的关系

由于惯性作用，汽车刹车后还要继续向前滑行一段距离才能停住，这段距离被称为“刹车距离”。为了测定某种型号汽车的刹车性能，对这种汽车的刹车距离进行测试，测得的数据见下表：

刹车时车速/ ($\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$)	40	48	56	64	72	80
刹车距离/m	17	22.4	27.9	35.3	43.4	52.8

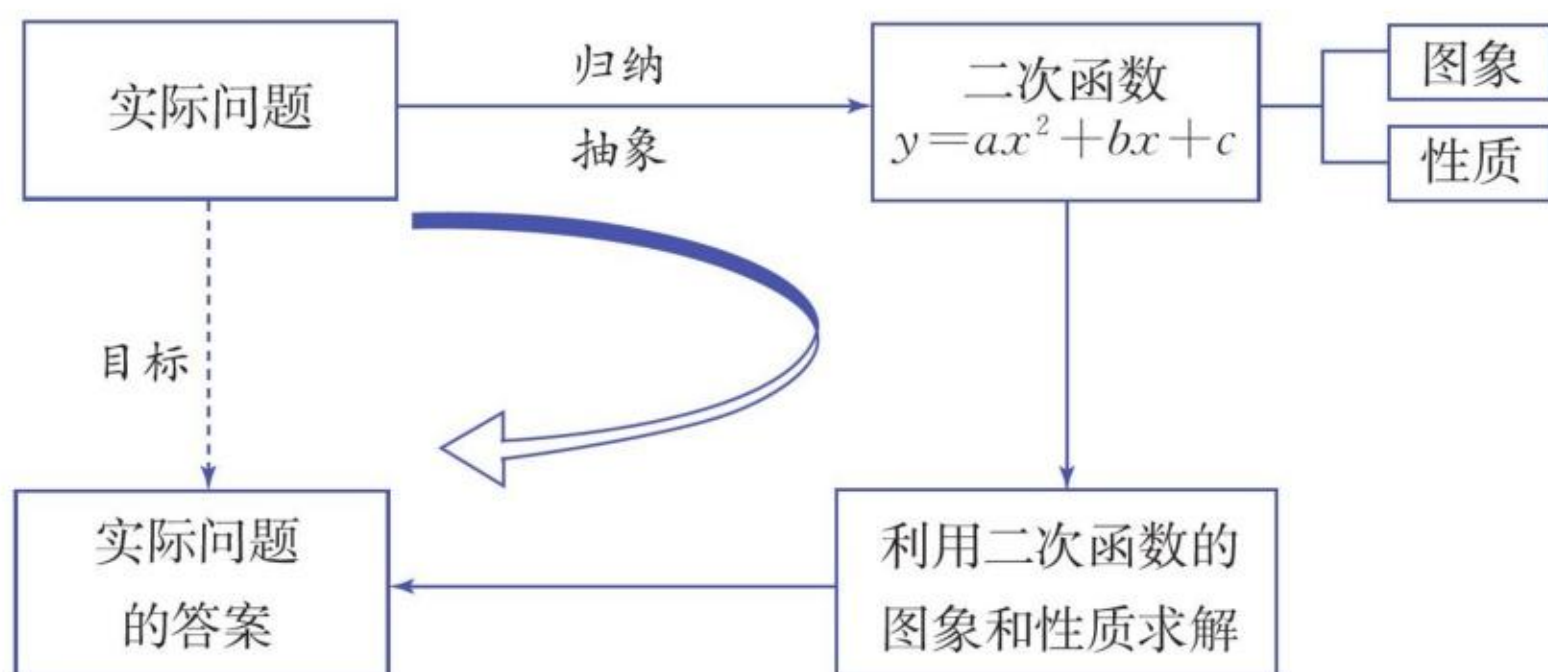
(1) 以刹车时车速为横坐标，刹车距离为纵坐标，根据表中数据，在平面直角坐标系中描点，并用平滑的曲线连接这些点，得到大致满足这些数据的函数图象。

(2) 通过观察图象估计函数的类型，求出一个大致满足这些数据的函数解析式。

(3) 一辆该型号汽车在高速公路上发生交通事故，现场测得这辆车的刹车距离约为70 m，已知这条高速公路限速100 km/h. 请根据你确定的函数解析式，通过计算判断：在事故发生时，汽车是否超速行驶？

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章我们首先认识了二次函数，研究了它的图象和性质，然后从函数的角度研究了一元二次方程，最后运用二次函数分析和解决了一些实际问题.

通过分析实际问题中的变量关系，我们抽象出了一类形如 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) 的函数，即二次函数，认识到二次函数是描述现实世界中变量关系和变化规律的数学模型.

在研究二次函数的图象和性质时，我们按照从简单到复杂、从特殊到一般的顺序：先讨论简单的二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质；再通过配方，将二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，通过平移，由抛物线 $y=ax^2$ 得到抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ ，利用图象得到 $y=a(x-h)^2+k$ 的性质，进而得到 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质. 在这个过程中，配方、图象平移等起着重要作用，而利用函数图象研究其性质，又一次体现了数形结合思想，让我们领悟到几何直观的作用.

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的公共点的情况，与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况联系密切. 如果函数图象与 x 轴有公共点，

那么公共点的横坐标就是对应方程的根. 据此, 我们研究了如何利用二次函数的图象求对应一元二次方程的根的近似值.

运用二次函数解决实际问题, 首先要用二次函数表示问题中变量之间的关系, 然后利用二次函数的图象和性质求解, 从而获得实际问题的答案. 这是一个用数学的眼光观察现实世界, 用数学的思维思考现实世界, 用数学的语言表达现实世界的过程. 经历此过程, 可以进一步增强应用意识和模型观念.

请你带着下面的问题, 复习一下全章的内容吧.

1. 举例说明, 一些实际问题中变量之间的关系可以用二次函数表示, 列出函数解析式并画出图象.

2. 结合二次函数的图象回顾二次函数的性质, 例如根据抛物线的开口方向、对称轴、顶点等, 说明二次函数在什么情况下取得最大值或最小值.

3. 结合抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴的公共点的情况, 说明方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根的各种情况.

4. 在日常生活、生产和科研中, 常常会遇到求什么条件下可以使材料最省、时间最少、效率最高等问题, 其中一些问题可以归结为求二次函数的最大值或最小值. 请举例说明如何分析、解决这样的问题.

5. 回顾一次函数和二次函数, 体会函数这种数学模型在描述现实世界运动变化中的作用.



复习题 26

复习巩固

1. 某市为打造“绿色城市”, 积极投入资金实施园林绿化工程. 已知去年一年投入资金 1 500 万元, 计划从今年起, 连续三年每年投入资金比上一年增加相同的百分率 x . 写出明年将投入的资金量 y (单位: 万元) 关于每年增加的百分率 x 的函数解析式.

2. 选择题.

(1) 下列各点中, 在抛物线 $y=x^2-4x-4$ 上的是 ().

(A) (4, 4)

(B) (3, -1)

(C) (-2, -8)

(D) $(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{4})$

(2) 下列抛物线中, 对称轴是 $x=-2$ 的是 ().

(A) $y=-2x^2-2$

(B) $y=2x^2-2$

(C) $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$

(D) $y=2(x-2)^2$

3. 先确定下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点, 说出随着 x 的增大, y 的变化情况, 再描点画图:

(1) $y=\frac{1}{5}x^2$;

(2) $y=-2x^2-3$;

(3) $y=\frac{1}{4}(x+2)^2$;

(4) $y=-\frac{1}{2}(x+\frac{3}{2})^2-1$.

4. 先确定下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点, 说出随着 x 的增大, y 的变化情况, 再描点画图:

(1) $y=x^2+2x-3$;

(2) $y=1+6x-x^2$;

(3) $y=\frac{1}{2}x^2+2x+1$;

(4) $y=-\frac{1}{4}x^2+x-4$.

5. 求下列二次函数的最大值或最小值:

(1) $y=x^2+3x+1$;

(2) $y=-2x^2-6x+5$.

6. 利用函数图象求下列方程的根的近似值 (结果保留小数点后一位):

(1) $2x^2-3x-1=0$;

(2) $x^2+5x-4=0$.

综合运用

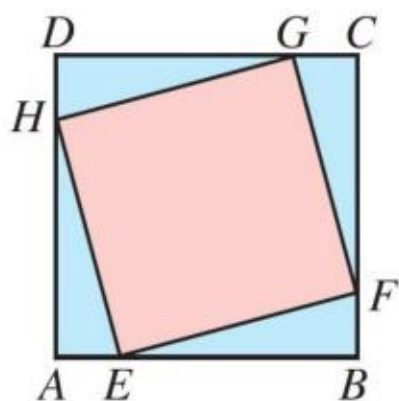
7. 某高为 1 m 的喷水管竖直向上喷水, 水在空中的高度 h (单位: m) 与水离开水管后在空中的时间 t (单位: s) 的关系近似为 $h=-5t^2+12t+1$.

(1) 水离开喷水管后, 经过多久能落回到起始高度?

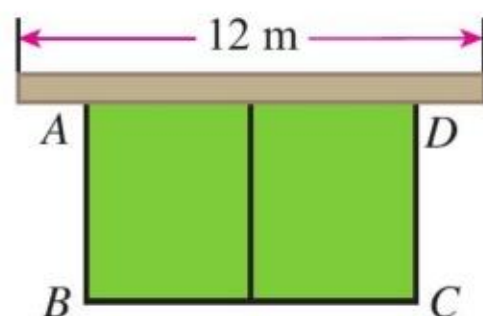
(2) 喷出的水在空中的最大高度是多少?

8. 若飞机着陆后滑行的距离 y (单位: m) 关于滑行时间 t (单位: s) 的函数解析式是 $y=60t-1.5t^2$. 飞机着陆后, 滑行多远才能停下来? 最后 4 s 将滑行多远?

9. 如图, 点 E, F, G, H 分别位于正方形 $ABCD$ 的四条边上, 四边形 $EFGH$ 也是正方形. 当点 E 位于何处时, 正方形 $EFGH$ 的面积最小?



(第 9 题)



(第 10 题)

10. 如图, 在一道长为 12 m 的墙一侧, 用长为 33 m 的篱笆, 围成一个一边靠墙、中间隔有一道篱笆的矩形花圃. 当 AB, BC 各为多少时, 花圃的面积最大? 最大面积是多少?
11. 某商品的进价为每件 35 元, 售价为每件 50 元, 每个月可卖出 210 件; 如果每件商品的售价每上涨 1 元, 那么每个月少卖 7 件 (每件售价不能高于 70 元). 设每件商品的售价上涨 x 元 (x 为正整数), 每个月的销售利润为 y 元.
- (1) 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出自变量 x 的取值范围.
 - (2) 每件商品的售价定为多少时, 每个月可获得最大利润? 最大的月利润是多少?
 - (3) 每件商品的售价定为多少时, 每个月的利润为 3 500 元? 根据以上结论, 请你写出售价在什么范围时, 每个月的利润不低于 3 500 元.
12. 已知矩形的周长为 36 cm, 矩形绕它的一条边旋转形成一个圆柱. 矩形的两邻边长各为多少时, 旋转形成的圆柱的侧面积最大?

拓展探索

13. 对某条路线的长度进行 n 次测量, 得到 n 个结果 $x_1, x_2, \dots, x_n$. 如果用 x 作为这条路线长度的近似值, 当 x 取什么值时, $(x-x_1)^2 + (x-x_2)^2 + \dots + (x-x_n)^2$ 最小? x 所取的这个值是哪个常用的统计量?

第二十七章 反比例函数

现实世界中的变化现象多种多样，除了一次函数、二次函数，还有其他函数模型可以用于刻画不同的变化规律. 例如，同一条铁路线上，由于不同车次列车的运行时间有长有短，所以它们的平均速度有快有慢. 由 $s=vt$ 可知，在路程 s 一定的前提下，平均速度 v 与运行时间 t 成反比例. 从函数角度看，平均速度 v 随运行时间 t 的变化而变化的规律，可表示为 $v=\frac{s}{t}$ ，这类函数就是本章要研究的反比例函数.

与研究一次函数、二次函数类似，我们先从现实世界中具有反比例关系的具体变化实例出发，抽象得出反比例函数的概念，然后研究反比例函数的图象和性质，并运用反比例函数解决一些实际问题. 在经历建立模型、求解模型、验证反思的学习过程中，你将再次体会建立函数模型解决问题的思想与方法.



27.1 反比例函数的概念

与研究一次函数、二次函数类似，我们仍然从现实世界中具有某种变化规律的具体实例出发，用函数的眼光分析问题中变量之间的对应关系，抽象出它们的共同特征，获得反比例函数的概念.

思考

在下列问题中，变量之间具有函数关系吗？如果有，它们的解析式有什么共同特点？

(1) 京沪高铁全程为 1 318 km，某次列车的平均速度 v (单位：km/h) 随此次列车的全程运行时间 t (单位：h) 的变化而变化；

(2) 某住宅小区要种植一块面积为 1 000 m^2 的矩形草坪，草坪相邻两边的一边长 y (单位：m) 随另一边长 x (单位：m) 的变化而变化；

(3) 李明计划在一段时间内使用完 5 GB 手机流量，平均每天使用的流量 Q (单位：GB) 随使用完流量的总时间 t (单位：天) 的变化而变化.

在问题 (1) 中，有两个变量 t 与 v ，当一个量 t 变化时，另一个量 v 随着 t 的变化而变化，而且对于 t 的每一个确定的值， v 都有唯一确定的值与其对应. 问题 (2) (3) 也一样. 所以这些变量之间具有函数关系，它们的解析式分别为

$$v = \frac{1\,318}{t}, \quad y = \frac{1\,000}{x}, \quad Q = \frac{5}{t}.$$

上述解析式都具有 $y = \frac{k}{x}$ 的形式，其中 k 是非零常数.

一般地，形如 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数， $k \neq 0$) 的函数叫作**反比例函数** (inverse proportional function)，其中 x 是自变量，其取值范围是不等于 0 的一切实数.

在 $y = \frac{k}{x}$ 中，当 $x = 0$ 时，分式 $\frac{k}{x}$ 无意义.

例如，在上面的问题（1）中，当路程一定时， $v = \frac{1\,318}{t}$ 表示速度 v 是时间 t 的反比例函数.

例 已知 y 是 x 的反比例函数，且当 $x=2$ 时， $y=6$.

(1) 写出 y 关于 x 的函数解析式；

(2) 当 $x=4$ 时，求 y 的值.

分析：因为 y 是 x 的反比例函数，所以设 $y = \frac{k}{x}$. 把 $x=2$ ， $y=6$ 代入上式，就可求出常数 k 的值.

解：(1) 设 $y = \frac{k}{x}$. 因为当 $x=2$ 时， $y=6$ ，所以

$$6 = \frac{k}{2}.$$

解得

$$k = 12.$$

因此

$$y = \frac{12}{x}.$$

(2) 把 $x=4$ 代入 $y = \frac{12}{x}$ ，得

$$y = \frac{12}{4} = 3.$$

练习

1. 用函数解析式表示下列问题中变量之间的关系：

- (1) 一个游泳池的容积为 $2\,000\text{ m}^3$ ，游泳池注满水所用时间 t (单位：h) 随注水速度 v (单位： m^3/h) 的变化而变化；
- (2) 学校准备将 $1\,000\text{ m}^2$ 实践田平均划分给一些班级，每班分得的实践田面积 y (单位： m^2) 随班级个数 x 的变化而变化；
- (3) 在某次物理实验中，电路中的电压 U 为 3 V ，则该电路中的电流 I (单位：A) 随电阻 R (单位： Ω) 的变化而变化.

2. 已知 y 是 x 的反比例函数，当 $x=-2$ 时， $y=4$. 求这个函数的解析式和自变量的取值范围.

习题 27.1

复习巩固

- 用函数解析式表示下列问题中变量之间的关系，并指出它们各是什么函数：
 - 圆柱形蓄水池的容积是常数 V (单位： m^3)，其底面积 S (单位： m^2) 与高 h (单位： m) 之间的关系；
 - 王芳要把一篇包含 32 000 字的调查报告录入电脑，完成录入所用时间 t (单位： min) 与录入平均速度 v (单位：字/ min) 之间的关系；
 - 列车从相距 2 240 km 的甲地行驶到乙地，平均速度 v (单位： km/h) 与全程行驶时间 t (单位： h) 之间的关系；
 - 列车以 300 km/h 的平均速度从甲地行驶到乙地，行驶路程 s (单位： km) 与行驶时间 t (单位： h) 之间的关系。

综合运用

- 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$)，当自变量 x 扩大到原来的 a 倍 ($a \geq 2$ ，且 a 为正整数) 时，对应的函数值 y 将如何变化？请说明理由。

拓广探索

- 已知 y 与 x^2 成反比例，且当 $x = 3$ 时， $y = 4$ 。
 - 写出 y 关于 x 的函数解析式；
 - 当 $x = 1.5$ 时，求 y 的值；
 - 当 $y = 6$ 时，求 x 的值。

27.2 反比例函数的图象和性质

与研究一次函数、二次函数的图象和性质类似，在建立反比例函数的概念后，我们类比上述函数图象和性质的研究方法，研究反比例函数的图象和性质.

思考

回顾一次函数、二次函数的图象和性质的研究过程，如何研究反比例函数的图象和性质？

在研究一次函数、二次函数的图象和性质时，都是先画出函数的图象，再利用图象，结合函数的解析式研究函数的性质，这种方法同样适用于反比例函数.

有了前面的知识储备，我们换一个角度，从反比例函数的解析式出发，思考它的图象形状，运用数形结合的方法研究其性质.

与对一次函数的研究一样，需要对反比例函数解析式 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数， $k \neq 0$) 中的 k 分情况讨论，即分 $k > 0$ ， $k < 0$ 两种情况.

先研究 $k > 0$ 时的情况，我们从具体的反比例函数开始.

探究

对于反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 与 $y = \frac{6}{x}$ ，结合它们的解析式，分析自变量的取值范围，以及 y 随 x 的变化而变化的规律，你能想象一下它们图象的位置和形状吗？你能画出它们图象的示意图吗？

用描点法画出反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 与 $y = \frac{6}{x}$ 的图象，看看它们是否与你画出的示意图大致相同.

下面用描点法画函数 $y = \frac{3}{x}$ 与 $y = \frac{6}{x}$ 的图象.

(1) 列表. 写出几组 x 与 y 的对应值 (填空):

x	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6	...
$y = \frac{3}{x}$	...			$-\frac{3}{4}$	-1			3		1		$\frac{3}{5}$		...
$y = \frac{6}{x}$	...	-1	$-\frac{6}{5}$		-2	-3		6		2	$\frac{3}{2}$		1	...

(2) 描点. 以表中各组对应值为坐标, 在平面直角坐标系中描出相应的点.

(3) 连线. 用平滑的曲线顺次连接描出的点, 就得到函数 $y = \frac{3}{x}$ 与 $y = \frac{6}{x}$

的图象 (图 27.2-1).

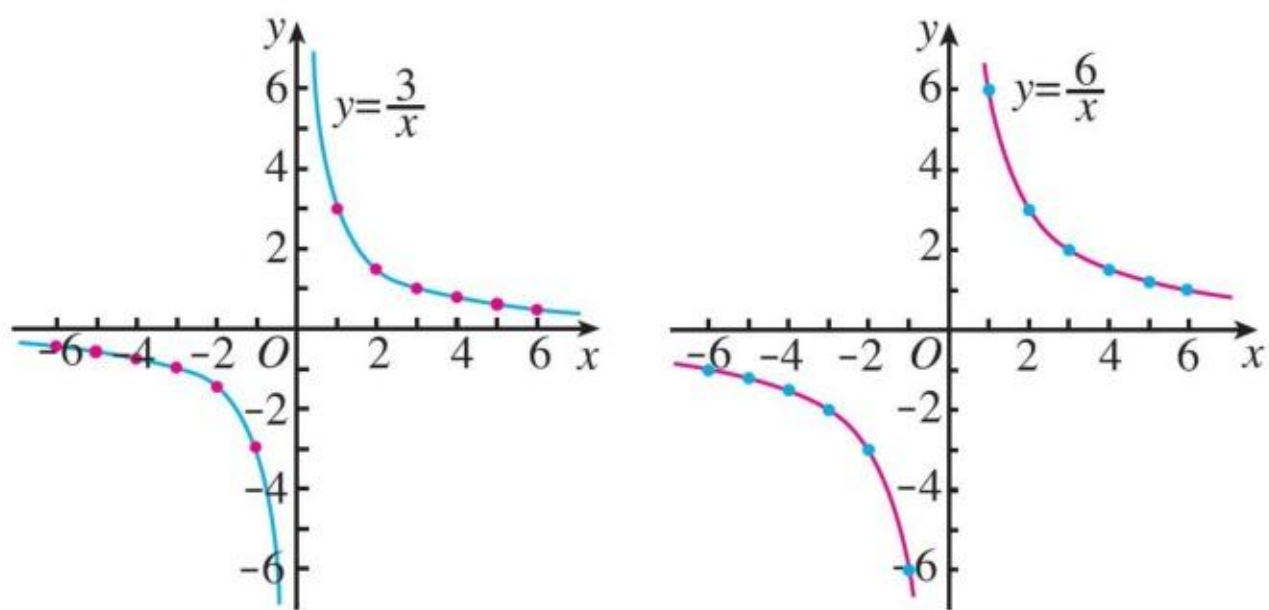


图 27.2-1

因为 $x \neq 0$, 所以函数图象由两支曲线组成. 在画示意图时, 你注意到这一点了吗?

思考

观察反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 与 $y = \frac{6}{x}$ 的图象, 回答下列问题:

(1) 每个函数的图象分别位于哪些象限?

(2) 在每一个象限内, 随着 x 的增大, y 如何变化? 你能由它们的解析式说明理由吗?

利用信息技术工具, 画反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的 k 取不同值时的图象 (图 27.2-2), 考虑问题(1)(2), 你能得出同样的结论吗?

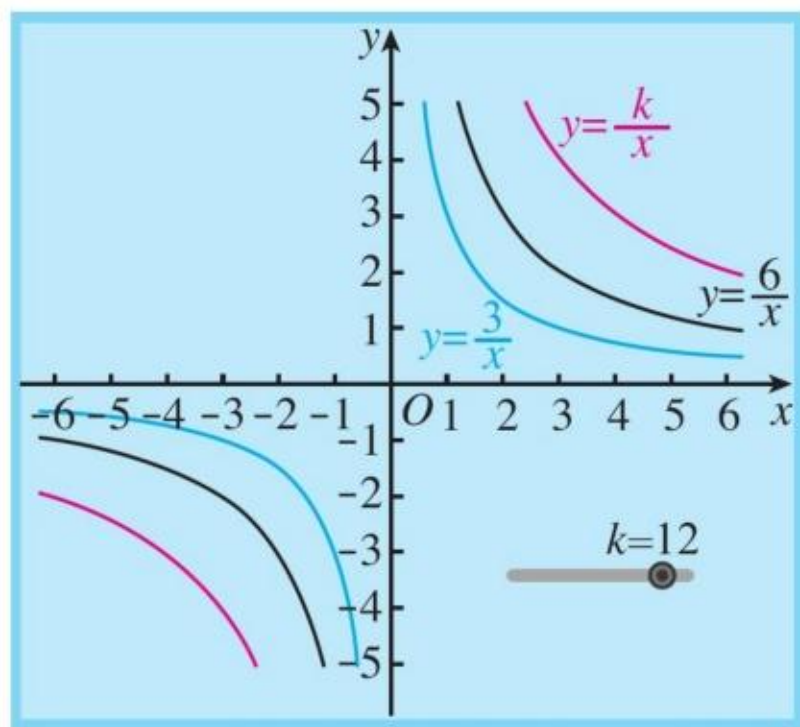


图 27.2-2

一般地，当 $k > 0$ 时，对于反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ，结合函数图象与解析式，

可以发现：

- (1) 函数图象的两支分别位于第一、第三象限；
- (2) 在每一个象限内， y 随 x 的增大而减小.

接下来，我们研究 $k < 0$ 时反比例函数的图象和性质.

探究

回顾上述过程，我们从特殊到一般、数形结合地研究了反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的图象和性质，你能用类似的方法研究反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 的图象和性质吗？

一般地，当 $k < 0$ 时，对于反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ，结合函数图象（图 27.2-3）与解析式，可以发现：

- (1) 函数图象的两支分别位于第二、第四象限；
- (2) 在每一个象限内， y 随 x 的增大而增大.

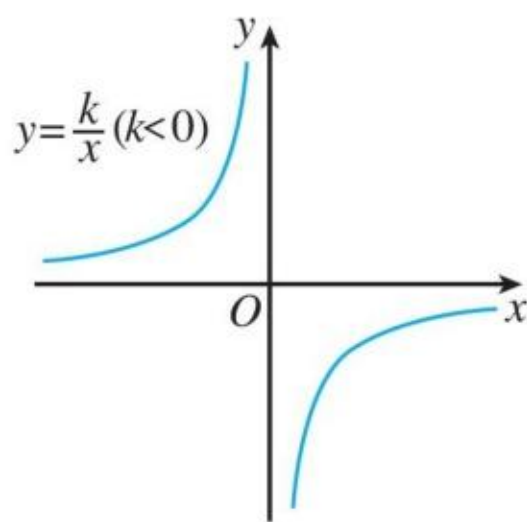


图 27.2-3

归纳

反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象特征和性质如下：

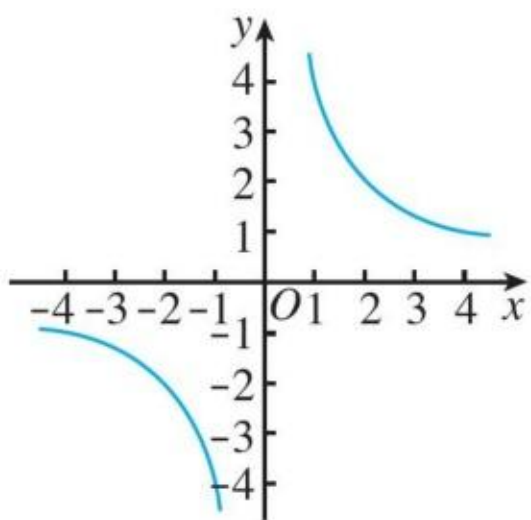
- (1) 反比例函数的图象由两条曲线组成，它是双曲线.
- (2) 当 $k > 0$ 时，双曲线的两支分别位于第一、第三象限，在每一个象限内， y 随 x 的增大而减小；

当 $k < 0$ 时，双曲线的两支分别位于第二、第四象限，在每一个象限内， y 随 x 的增大而增大.

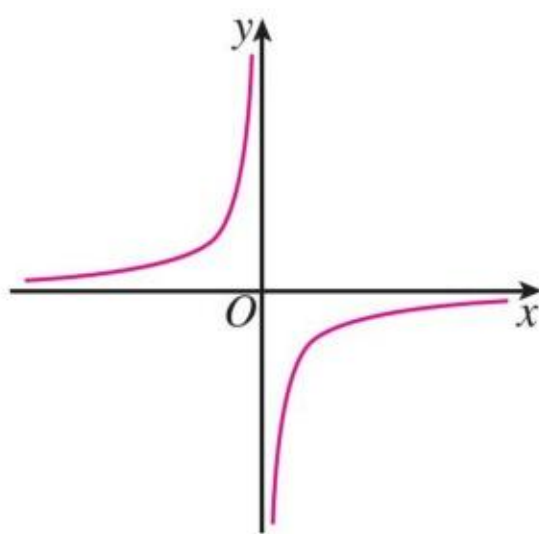
 练习

1. 如图所示的图象对应的函数解析式为 ().

- (A) $y=5x$ (B) $y=2x+3$ (C) $y=\frac{4}{x}$ (D) $y=-\frac{2}{x}$



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象如图所示, 则 k 0; 在每个象限内, y 随 x 的增大而 .

例 1 已知反比例函数的图象经过点 $A(-2, 4)$.

(1) 这个函数的图象位于哪些象限? y 随 x 的增大如何变化?

(2) 点 $B(1, -8)$, $C(2\frac{1}{2}, -3\frac{1}{5})$, $D(2, 4)$ 是否在这个函数的图象上?

解: (1) 反比例函数图象的位置只有两种可能: 位于第一、第三象限, 或者位于第二、第四象限. 因为点 $A(-2, 4)$ 在第二象限, 所以这个函数的图象位于第二、第四象限. 在每一个象限内, y 随 x 的增大而增大.

(2) 设这个反比例函数的解析式为 $y=\frac{k}{x}$. 因为点 $A(-2, 4)$ 在其图象上, 所以点 A 的坐标满足 $y=\frac{k}{x}$, 即

$$4 = \frac{k}{-2}.$$

解得

$$k = -8.$$

因此, 这个反比例函数的解析式为 $y=-\frac{8}{x}$. 因为点 B, C 的坐标都满足

$y = -\frac{8}{x}$, 点 D 的坐标不满足 $y = -\frac{8}{x}$, 所以点 B, C 在函数 $y = -\frac{8}{x}$ 的图象上, 点 D 不在这个函数的图象上.

例 2 图 27.2-4 中的曲线是反比例函数 $y = \frac{m-5}{x}$ 的图象的一支. 根据图象, 回答下列问题:

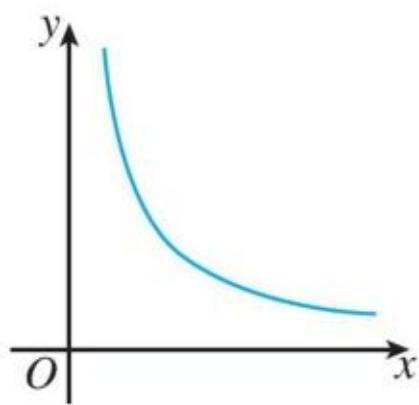


图 27.2-4

(1) 图象的另一支位于哪个象限? 常数 m 的取值范围是什么?

(2) 在这个函数图象的某一支上任取点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$. 如果 $x_1 > x_2$, 那么 y_1 和 y_2 有怎样的大小关系?

解: (1) 因为这个函数的图象的一支位于第一象限, 所以另一支必位于第三象限.

因为这个函数的图象位于第一、第三象限, 所以

$$m-5 > 0.$$

解得

$$m > 5.$$

(2) 因为 $m-5 > 0$, 所以在这个函数图象的任意一支上, y 都随 x 的增大而减小. 因此当 $x_1 > x_2$ 时, $y_1 < y_2$.

练习

1. 已知一个反比例函数的图象经过点 $A(2, 6)$.

(1) 这个函数的图象位于哪些象限? 在每一个象限内, y 随 x 的增大如何变化?

(2) 点 $B(3, 4)$, $C(-2\frac{1}{2}, -4\frac{4}{5})$, $D(2, -6)$ 是否在这个函数的图象上? 为什么?

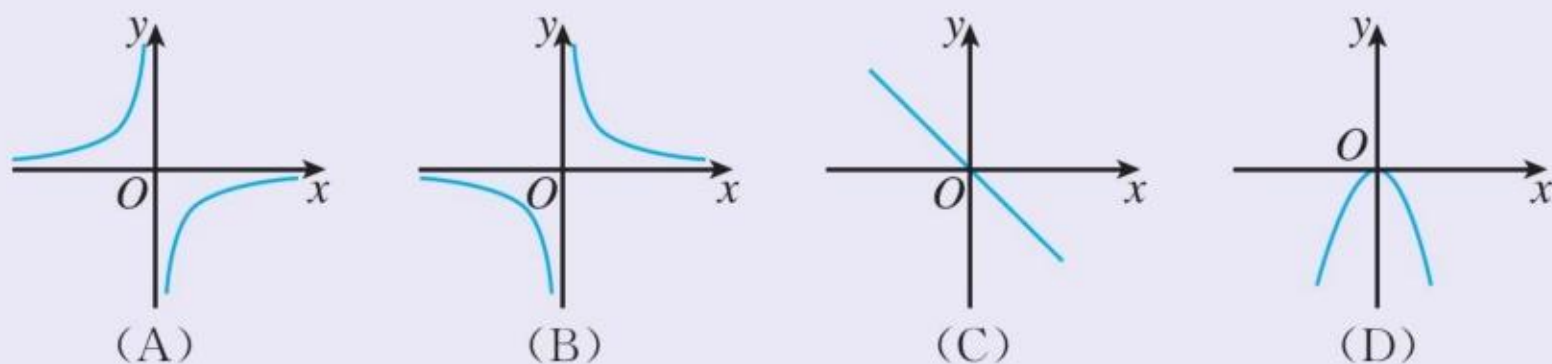
2. 反比例函数 $y = \frac{m+2}{x}$ 的图象的一支位于第二象限, 图象的另一支位于哪个象限? 常数 m 的取值范围是什么?

3. 已知点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象上. 如果 $x_1 < x_2$, 且 x_1, x_2 同号, 那么 y_1, y_2 有怎样的大小关系? 为什么?

习题 27.2

复习巩固

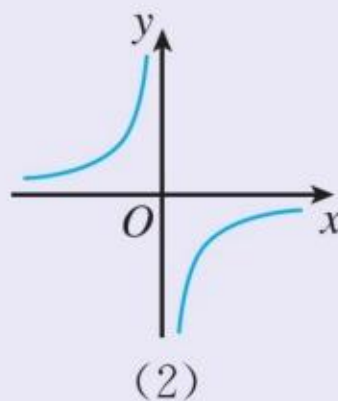
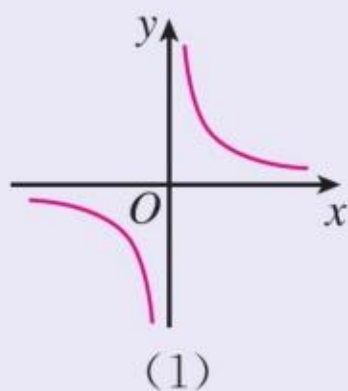
1. 函数 $y = -\frac{3}{x}$ 的图象大致是 ().



(第 1 题)

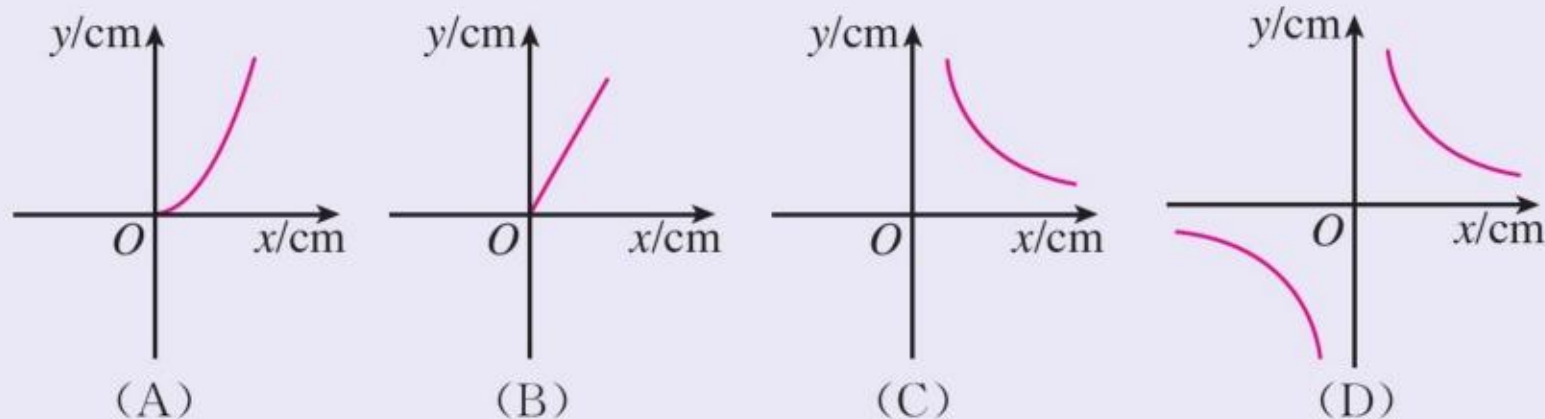
2. 填空题.

- (1) 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象如图 (1) 所示, 则 k ____ 0, 在每一个象限内, y 随 x 的增大而 ____;
- (2) 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象如图 (2) 所示, 则 k ____ 0, 在每一个象限内, y 随 x 的增大而 ____;
- (3) 若点 $(1, 3)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上, 则 $k =$ ____, 在每一个象限内, y 随 x 的增大而 ____.



(第 2 题)

3. 李明需要制作一个底面积为 20 cm^2 的长方体无盖纸盒, 底面矩形的一边长 y (单位: cm) 与其邻边长 x (单位: cm) 之间的关系可以用图象大致表示为 ().



(第 3 题)

综合运用

4. 已知点 $(-2, -4)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上.

(1) 当 $y < 4$ 时, 求 x 的取值范围;

(2) 已知点 $A(-3, y_1)$, $B(-5, y_2)$, $C(4, y_3)$ 在这个反比例函数的图象上, 比较 y_1, y_2, y_3 的大小, 并用反比例函数的性质说明理由.

5. 正比例函数 $y = -x$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象有一个交点的纵坐标是 2.

(1) 当 $x = -3$ 时, 求反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的值;

(2) 当 $-3 < x < -1$ 时, 求反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的取值范围.

拓广探索

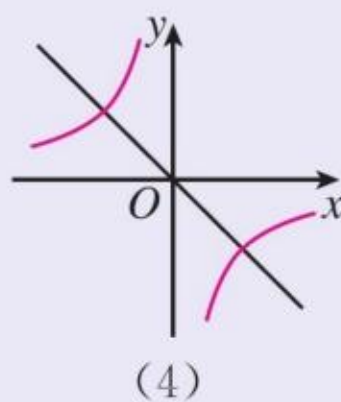
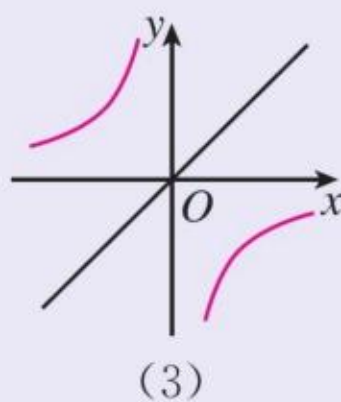
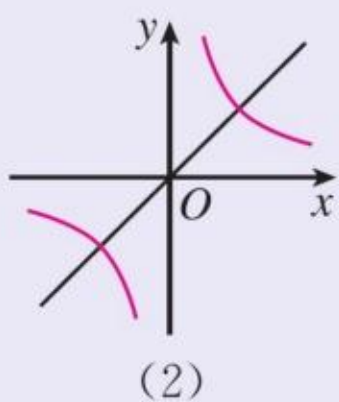
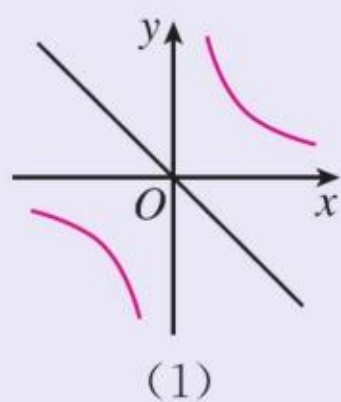
6. 在同一平面直角坐标系中, 函数 $y = kx$ 与 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象大致是 ().

(A) (1)(2)

(B) (1)(3)

(C) (2)(4)

(D) (3)(4)



(第 6 题)

7. 已知反比例函数 $y = \frac{a - \sqrt{2}}{x}$ 的图象的一支位于第一象限.

(1) 图象的另一支位于哪个象限? 常数 a 的取值范围是什么?

(2) 在该函数图象上任取点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$. 如果 $y_1 > y_2$, 那么 x_1 与 x_2 有怎样的大小关系?

27.3 实际问题与反比例函数

函数是具有广泛应用的数学模型. 对于某些实际问题, 如果其中两个变量之间具有反比例关系, 那么我们就可以利用反比例函数来研究它.

例 1 港口的起重机每小时可往一艘轮船上装载 700 t 货物, 一艘轮船的货物装载完毕恰好用了 9 h.



(1) 此轮船到达另一港口后开始卸货, 起重机平均卸载速度 v (单位: t/h) 与卸载完所有货物的总时间 t (单位: h) 之间有怎样的函数关系?

(2) 由于遇到紧急情况, 要求轮船上的货物不超过 6 h 卸载完毕, 那么起重机平均每小时至少要卸载多少货物?

分析: 根据“平均装载速度 $\times$ 装载总时间 = 货物总量”, 可以先求出轮船装载货物的总量; 再根据“平均卸载速度 = 货物总量 $\div$ 卸载总时间”, 得到 v 关于 t 的函数解析式.

解: (1) 轮船上的货物总量为 $700 \times 9 = 6\,300$ (t), 所以 v 关于 t 的函数解析式为

$$v = \frac{6\,300}{t}.$$

(2) 把 $t=6$ 代入 $v = \frac{6\,300}{t}$, 得

$$v = \frac{6\,300}{6} = 1\,050 \text{ (t/h)}.$$

从结果可以看出, 如果全部货物恰好用 6 h 卸载完, 那么平均每小时卸载 1 050 t. 对于函数 $v = \frac{6\,300}{t}$, 当 $t > 0$ 时, t 越小, v 越大. 因此, 若货物不超过 6 小时卸载完, 则平均每小时至少要卸载 1 050 t 货物.

古希腊科学家阿基米德（公元前 287—前 212）发现：若杠杆上的两物体与支点的距离与其所受重力成反比，则杠杆平衡. 后来人们把它归纳为“杠杆原理”. 杠杆原理为：阻力 $\times$ 阻力臂=动力 $\times$ 动力臂（图 27.3-1）.

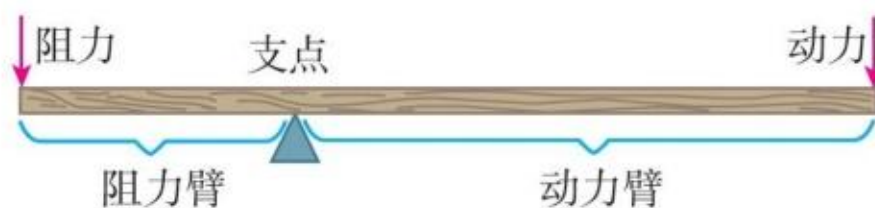


图 27.3-1

例 2 某工人欲用撬棍撬动一块大石头，已知阻力和阻力臂分别为 1 200 N 和 0.5 m.

(1) 动力 F (单位：N) 与动力臂 l (单位：m) 有怎样的函数关系？当动力臂为 1.5 m 时，撬动石头至少需要多大的力？

(2) 若想使动力 F 不超过 (1) 中所用力的一半，则动力臂 l 至少要加长多少？

解：(1) 根据“杠杆原理”，得

$$Fl = 1\,200 \times 0.5,$$

所以 F 关于 l 的函数解析式为

$$F = \frac{600}{l}.$$

当 $l = 1.5$ m 时，

$$F = \frac{600}{1.5} = 400 \text{ (N)}.$$

对于函数 $F = \frac{600}{l}$ ，当 $l = 1.5$ m 时， $F = 400$ N，此时杠杆平衡. 因此，撬动石头至少需要 400 N 的力.

(2) 对于函数 $F = \frac{600}{l}$ ，当 $l > 0$ 时， F 随 l 的增大而减小. 因此，只要求出 $F = 200$ N 时对应的 l 的值，就能确定动力臂 l 至少应加长的量.

将 $F = 400 \times \frac{1}{2} = 200$ 代入 $F = \frac{600}{l}$ ，得

$$200 = \frac{600}{l},$$

$$l = \frac{600}{200} = 3 \text{ (m)}.$$

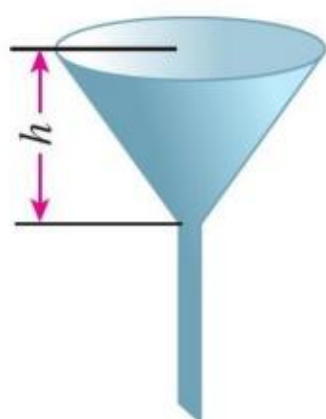
因此,若想用力不超过 400 N 的一半,动力臂的长度就应该不小于 3 m ,则动力臂至少要加长 $3-1.5=1.5(\text{m})$.

用反比例函数的知识
解释:在使用撬棍时,为什么动力臂越长就越省力?

练习

1. 如图,某玻璃器皿制造公司要制造容积为 120 cm^3 (不计直玻璃管部分)的圆锥形漏斗.

- (1) 漏斗口的面积 S (单位: cm^2) 与漏斗的深 h (单位: cm) 有怎样的函数关系?
- (2) 如果漏斗口的面积不超过 50 cm^2 , 那么漏斗的深 h 至少为多少?



(第1题)

2. 为推广新能源汽车,某销售商推出免息分期付款的购车促销活动.客户交付首付款后,在36个月内结清余款即可.小张在活动期间购买了价格为18万元的汽车,首付款6万元.他计划用 x 个月结清余款,平均每月还款 y 万元.

- (1) y 与 x 有怎样的函数关系?
- (2) 如果小张打算20个月结清余款,那么他平均每月应还款多少万元?
- (3) 如果小张打算每月还款不超过5000元,那么他至少要多少个月才能结清余款?

例3 在力 F (单位: N) 的作用下,若物体会在力 F 的方向上发生位移 s (单位: m),则力 F 所做的功 W (单位: J) 满足 $W=Fs$. 当 W 为定值时, s 与 F 之间的函数关系如图 27.3-2 所示.

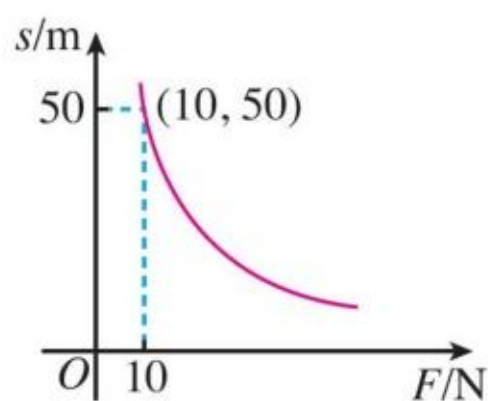


图 27.3-2

- (1) 当力 F 为 10 N 时,求 F 所做的功 W ;
- (2) 写出 s 关于 F 的函数解析式;
- (3) 在做功相同的情况下,要使物体在力的作用下的位移小于 100 m ,求力的范围.

解: (1) 由图 27.3-2 可知,当力 F 为 10 N 时,物体在力 F 的方向上发生

的位移 s 为 50 m, 此时 F 所做的功 $W = Fs = 10 \times 50 = 500$ (J).

(2) 当 W 为定值时, 可以用反比例函数描述 s 与 F 之间的关系. 由 (1) 可知其解析式为

$$s = \frac{500}{F}.$$

(3) 将 $s = 100$ 代入 $s = \frac{500}{F}$, 可得 $F = 5$ (N).

因为 s 随着 F 的增大而减小, 所以要使物体在力的作用下的位移小于 100 m, 力 F 要大于 5 N.

例 4 一辆客车从甲地行驶到乙地, 平均速度 v (单位: km/h) 与行驶全程所用时间 t (单位: h) 的函数关系如图 27.3-3 所示, 其中 $60 \leq v \leq 120$.

(1) 写出 v 关于 t 的函数解析式, 并求 t 的取值范围;

(2) 若客车上午 8 时从甲地出发, 需在当天 10 时 40 分至 11 时之间到达乙地, 求客车平均速度 v 的范围.

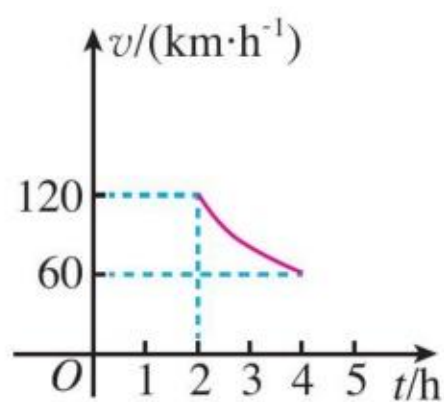


图 27.3-3

解: (1) 甲地到乙地的路程为定值, 可以用反比例函数描述 v 与 t 之间的关系. 由图 27.3-3 可知, 当 $t = 2$ 时, $v = 120$, 于是有

$$v = \frac{240}{t}. \quad \text{①}$$

当 $v = 60$ 时, 由①得 $t = 4$.

因为 $60 \leq v \leq 120$, 并且平均速度 v 随着行驶全程所用时间 t 的增大而减小, 所以 $2 \leq t \leq 4$.

(2) 客车上午 8 时从甲地出发, 若当天 10 时 40 分到达乙地, 则行驶全程所用时间 $t = 2\frac{2}{3}$ h, 代入①, 可得 $v = 90$ (km/h); 若当天 11 时到达乙地, 则行驶全程所用时间 $t = 3$ h, 代入①, 可得 $v = 80$ (km/h).

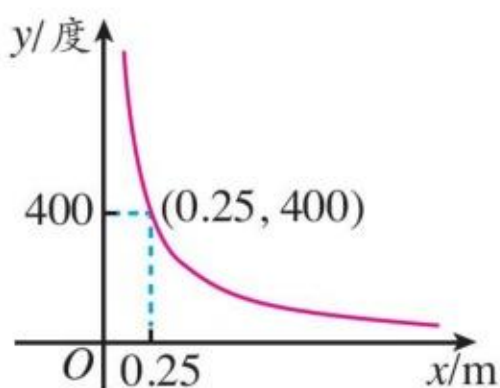
因为平均速度 v 随着行驶全程所用时间 t 的增大而减小, 所以客车平均速度 v 的范围是 $80 \leq v \leq 90$.

练习

1. 近视眼镜镜片的度数 y (单位: 度) 是关于镜片焦距 x (单位: m) 的反比例函数, 其图象如图所示.

(1) 求近视眼镜镜片的度数 y 关于镜片焦距 x 的函数解析式;

(2) 若某近视眼镜的镜片为 500 度, 求其焦距.



(第 1 题)

2. 收音机的音量、台灯的亮度以及电风扇的转速都

可以通过内置的可变电阻来调节. 某用电器内置可变电阻 R 的范围为 $110 \sim 220 \Omega$, 电压 U 为 220 V. 已知功率 $P = \frac{U^2}{R}$, 回答下列问题:

(1) 功率 P 与电阻 R 有怎样的函数关系?

(2) 这个用电器的功率 P 的范围是多少?

函数是刻画现实世界中变量关系和变化规律的数学模型. 面对不同的实际问题, 我们需要根据数据和图象特征选择合适的函数模型, 确定函数解析式, 利用函数解决问题.

探究

某物理实验小组研究气体的压强 p (单位: kPa) 与体积 V (单位: mL) 的关系, 在温度不变的条件下, 通过实验得到了 6 组数据 (表 27.3-1).

表 27.3-1

序号	1	2	3	4	5	6
体积 V/mL	20	18	16	14	12	10
压强 p/kPa	100	112	123	145	163	201

气体的压强 p 与体积 V 是否存在一定的函数关系? 如果存在, 请你建立函数模型, 并估计当压强为 132 kPa 时, 气体的体积为多少 (结果保留小数点后两位).

分析: 由表 27.3-1 可知, 压强 p 是体积 V 的函数. 由于没有现成的函数模型, 所以需要选择合适的函数类型.

(1) 为直观分析这组数据的变化规律, 可以先画出散点图 (图 27.3-4 (1)). 观察这些点的分布状况, 画一条曲线, 使其尽可能靠近所有这些点. 可以发现, 图 27.3-4 (2) 中的曲线形似双曲线的一支, 因此尝试选择反比例函数近似描述气体的压强 p 与体积 V 之间的关系.

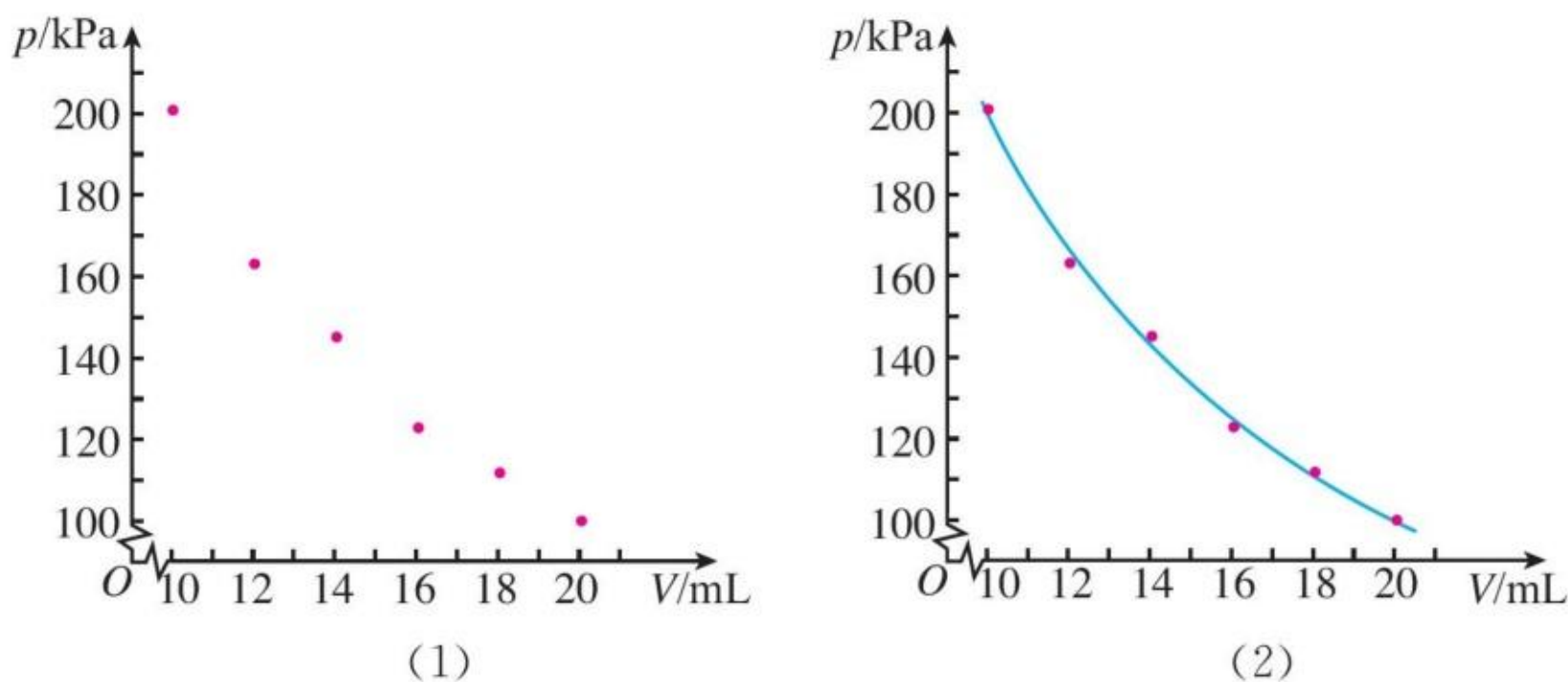


图 27.3-4

(2) 建立模型. 设函数解析式为 $p = \frac{k}{V}$ ($V > 0$), 根据表 27.3-1 中的数据, 分别求出 k 的值, 列表 27.3-2.

表 27.3-2

V	20	18	16	14	12	10
p	100	112	123	145	163	201
k	2 000	2 016	1 968	2 030	1 956	2 010

计算所有 k 值的平均值, 得

$$k = \frac{1}{6}(2\,000 + 2\,016 + 1\,968 + 2\,030 + 1\,956 + 2\,010) \approx 1\,997.$$

我们把这个平均值 1 997 作为 k 的值, 就得到一个函数模型

$$p = \frac{1\,997}{V}. \quad \text{①}$$

(3) 检验模型. 将已知数据代入①, 或画出函数①的图象, 可以发现, 这个函数模型与实际数据基本吻合, 说明它能较好地反映气体的压强 p 与体积 V 的关系.

(4) 求解问题. 将 $p = 132$ 代入①, 得

$$132 = \frac{1\,997}{V}.$$

解得

$$V = \frac{1\,997}{132} \approx 15.13 \text{ (mL)}.$$

因此, 当压强为 132 kPa 时, 气体的体积约为 15.13 mL.

练习

回顾“探究”, 回答以下问题:

- (1) 表 27.3-1 中的有些数对只能近似满足函数解析式 $p = \frac{1\,997}{V}$ ($V > 0$),

即图 27.3-4(1) 中的点并没有完全落在函数①的图象上, 这种建立函数模型的方式与你以往所学有什么不同?

- (2) 结合“探究”和问题 (1) 所涉及的分析与解决问题的过程, 归纳建立函数模型解决实际问题的一般步骤.

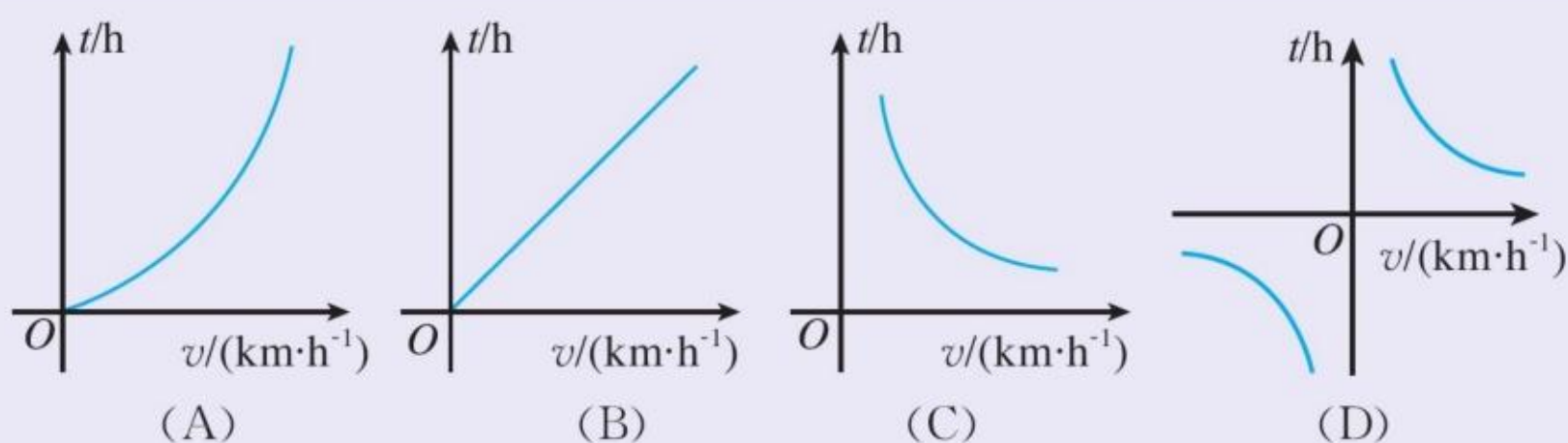
习题 27.3

复习巩固

- 举出一个生活中应用反比例函数的例子.
- 某农业大学计划修建一块面积为 $2 \times 10^6 \text{ m}^2$ 的矩形试验田.
 - 试验田的一边长 y (单位: m) 关于它的邻边长 x (单位: m) 的函数解析式是什么?
 - 如果试验田的相邻两边长的比为 2 : 1, 那么试验田的两邻边长分别为多少?
- 学校食堂一次性购买了 3 000 kg 大米.
 - 这些大米能够使用的天数 m 与食堂平均每天的用米量 n (单位: kg) 有怎样的函数关系?
 - 如果食堂平均每天使用大米 200 ~ 250 kg, 那么至少多少天后, 食堂需再购买大米?
- 在对地面的压力一定的情况下, 地面所受的压强 p (单位: Pa) 是受力面积 S (单位: m^2) 的反比例函数, 请填下表:

p/Pa					400	300	200	150	120	100
S/m^2	0.5	0.6	1	1.2	1.5					

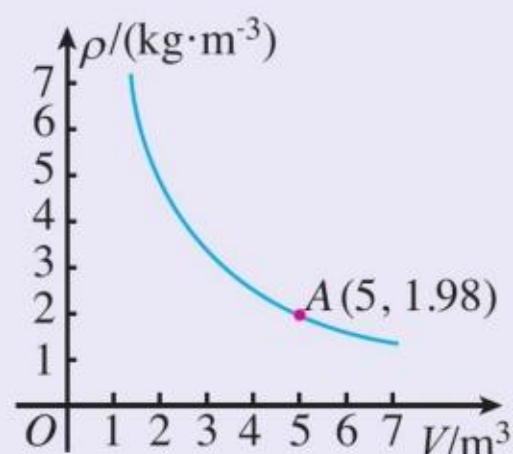
- 已知甲、乙两地相距 s (单位: km), 汽车从甲地匀速行驶到乙地, 则汽车行驶全程所用时间 t (单位: h) 关于行驶速度 v (单位: km/h) 的函数图象是 ().



(第 5 题)

综合运用

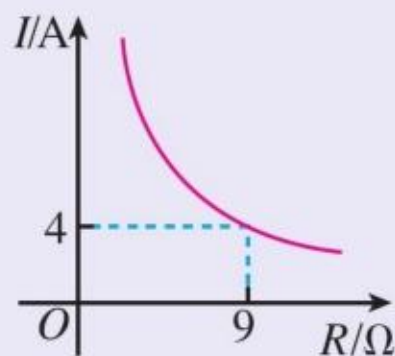
6. 密闭容器内有一定质量的二氧化碳, 当容器的容积 V (单位: m^3) 变化时, 气体的密度 ρ (单位: kg/m^3) 随之变化. 已知密度 ρ 与容积 V 是反比例函数关系, 它的图象如图所示.



(第 6 题)

- (1) 写出密度 ρ 关于容积 V 的函数解析式;
 - (2) 当 $V=9 \text{ m}^3$ 时, 求二氧化碳的密度 ρ .
7. 某棉花种植大户准备用 4 台同型号的大型棉花采摘机采摘 600 hm^2 棉花.
- (1) 采摘完该农场棉花所需时间 y (单位: 天) 与每台棉花采摘机的工作效率 x (单位: $\text{hm}^2/\text{天}$) 有怎样的函数关系?
 - (2) 4 台棉花采摘机全部投入工作, 每天最多共可采摘 60 hm^2 棉花, 预计棉花采摘最快可在几天内完成?

8. 已知蓄电池的电压为定值, 使用蓄电池时, 电流 I (单位: A) 与电阻 R (单位: Ω) 是反比例函数关系, 它的图象如图所示.



(第 8 题)

- (1) 写出电流 I 关于电阻 R 的函数解析式;
- (2) 如果以此蓄电池为电源的用电器的限制电流不能超过 10 A , 那么用电器可变电阻应控制在什么范围?

拓广探索

9. 生活中有各式各样的电子屏幕. 在相同分辨率下, 屏幕尺寸不同, 屏幕的像素密度也会不同. 下表记录了当分辨率为 1920×1080 时, 某些电子屏幕的尺寸 x (单位: 英寸) 与像素密度 y (单位: PPI) 的相关数据.

屏幕尺寸 x /英寸	5	7	15	24	27
屏幕像素密度 y /PPI	440	314	147	92	81

- (1) 试确定屏幕像素密度 y 关于屏幕尺寸 x 的函数解析式;

- (2) 某电子屏幕的分辨率为 $1\,920 \times 1\,080$ ，屏幕像素密度约为 40 PPI，则该屏幕尺寸为多少（结果取整数）？

阅读与思考

生活中的反比例函数

如果细心观察，你会发现，日常生活中的两个量之间，有许多具有反比例变化规律.

你一定熟悉这种现象：生活中常用的刀具，使用一段时间后就会变钝，用起来很费劲. 如果把刀刃磨薄，刀具就会锋利起来. 你知道这是为什么吗？

解释这种现象需要考虑压强与受力面积之间的关系. 压强不仅与压力的大小有关，还与受力面积的大小有关. 压强就是单位面积上受到的压力，压强的计算公式为

$$p = \frac{F}{S},$$

其中 p 为压强， F 为压力， S 为受力面积. 从上式可以看出，当压力 F 一定时，压强 p 是受力面积 S 的反比例函数. 使用刀具时，刀刃磨得越薄，即刀刃与物体的接触面积越小，压强就越大，刀具就会越锋利.



图 1

如图 1，你能解释为什么要在挖掘机的轮子上安装又宽又长的履带吗？你能说明大型载重卡车装有许多车轮的原因吗？

再如，在不考虑其他因素的情况下，一辆匀速行驶的汽车空载时行驶得很快，满载时速度明显减小了，这是为什么呢？

这里涉及汽车的行驶速度与汽车所受阻力之间的反比例关系. 设汽车的功率为 P ，行驶速度为 v ，所受阻力为 F ，三者满足关系

$$v = \frac{P}{F}.$$

从上面的式子可以看出，当汽车的功率 P 一定时，行驶速度 v 是阻力 F 的反比例函数. 也就是说，汽车负载越大，阻力就越大，行驶速度就会越小.

你还能再举出一些生活中应用反比例函数的例子吗？

数学活动

活动1 用矩形“画”双曲线

下表是 10 个面积相等的矩形的两邻边长，请补全表格.

一边长/cm	1	2	3	4	5					
邻边长/cm					2	$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{9}$	1

设 $\angle A$ 为这 10 个矩形的公共角，画出这 10 个矩形，然后取 $\angle A$ 的 10 个对角的顶点，并把这 10 个点用平滑的曲线连接起来.

这条曲线是反比例函数图象的一支吗？为什么？

活动2 用简易密度计测量密度

如图 1，物理兴趣小组的同学们做了一个圆柱形简易密度计，其质量为 7.2 g ，底面积为 1 cm^2 ，能悬浮在液体中. 经过实验，小组同学记录了当简易密度计悬浮在不同液体中时，其浸入液体的深度，得到如下数据：

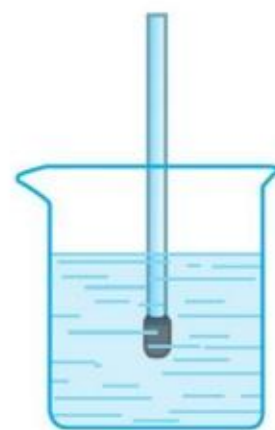


图 1

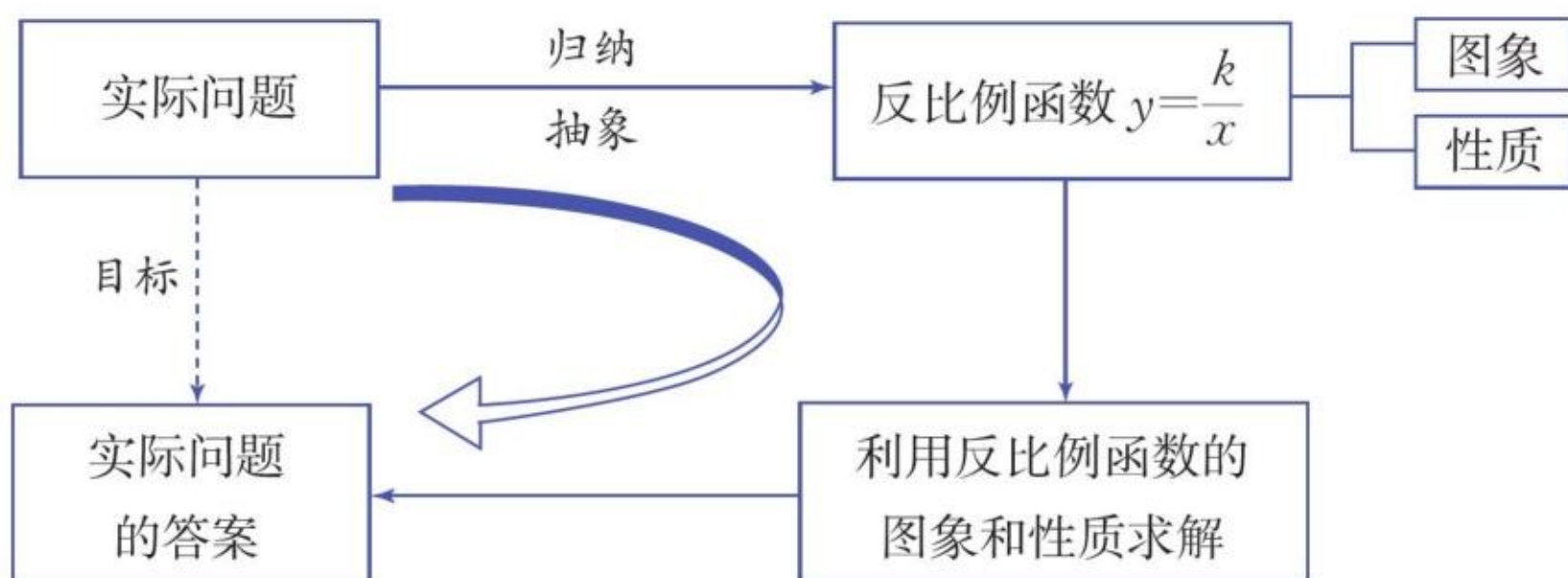
液体	汽油	煤油	植物油	水	饱和盐水	蜂蜜
$\rho/(\text{g} \cdot \text{cm}^{-3})$	0.70	0.80	0.90	1.00	1.15	1.40
h/cm	10.29	9	8	7.2	6.26	5.14

(1) 简易密度计浸入液体的深度 h (单位：cm) 与液体的密度 ρ (单位： g/cm^3) 之间是否具有函数关系？如果有，请你选择合适的函数模型描述这种关系.

(2) 当简易密度计悬浮在牛奶中时，它浸入牛奶的深度为 6.99 cm ，则牛奶的密度为多少（结果保留小数点后两位）？

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

与一次函数和二次函数类似，在本章中，我们先从现实世界中具有反比例关系的实例出发，从函数角度刻画了反比例关系，认识了反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ；然后研究了反比例函数的图象和性质，并用反比例函数解决了一些实际问题。

反比例函数刻画了具有反比例关系的两个变量之间的对应关系：在变量 y 随变量 x 的变化而变化的过程中，它们的积 xy 始终保持不变 ($xy=k$, $k\neq 0$)。这也是判断一个问题能否用反比例函数来刻画的依据。运用这一点，我们可以通过分析数据或图象，建立反比例函数模型解决实际问题。

从一次函数到二次函数，再到反比例函数，我们一直在经历用函数的眼光观察现实世界事物的变量关系和变化规律，用函数的思想方法分析问题和解决问题的过程，这有助于我们提升抽象能力，增强模型观念。

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧。

1. 举例说明什么是反比例函数，反比例函数描述了怎样的变化规律？
2. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象是怎样的？反比例函数有什么性质？
3. 你能举出几个现实生活中运用反比例函数性质的实例吗？

4. 回顾应用反比例函数解决实际问题的过程, 总结建立函数模型解决实际问题的步骤.

5. 结合本章的学习, 你能总结研究一类函数模型的思路和方法吗?



复习题 27

复习巩固

1. 在下列式子中, y 是 x 的反比例函数的是 ().

(A) $y = \frac{1}{x^2}$

(B) $yx = -\sqrt{3}$

(C) $y = 5x + 6$

(D) $\sqrt{x} = \frac{1}{y}$

2. 对于反比例函数 $y = \frac{3}{x}$, 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 函数 y 的值是_____.

3. 填空题.

(1) 函数 $y = \frac{10}{x}$ 的图象位于第_____象限, 在每一个象限内, y 随 x 的增大而_____;

(2) 函数 $y = -\frac{10}{x}$ 的图象位于第_____象限, 在每一个象限内, y 随 x 的增大而_____.

4. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), 当 $x = -6$ 时, $y = \frac{2}{3}$.

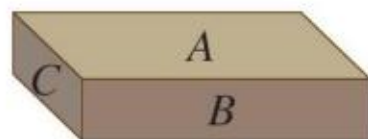
(1) 求 y 关于 x 的函数解析式及自变量 x 的取值范围;

(2) 判断点 $(-2, 2)$, $(1, 4)$ 是否在这个函数的图象上.

综合运用

5. 对于反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$, 在每一个象限内, y 随 x 的增大而减小, 求 k 的取值范围.

6. 如图, 一块砖的 A , B , C 三个面的面积比是 $4:2:1$. 如果 B 面向下放在地上, 地面所受压强为 p (单位: Pa), 那么 A 面和 C 面分别向下放在地上时, 地面所受压强各是多少?



(第6题)

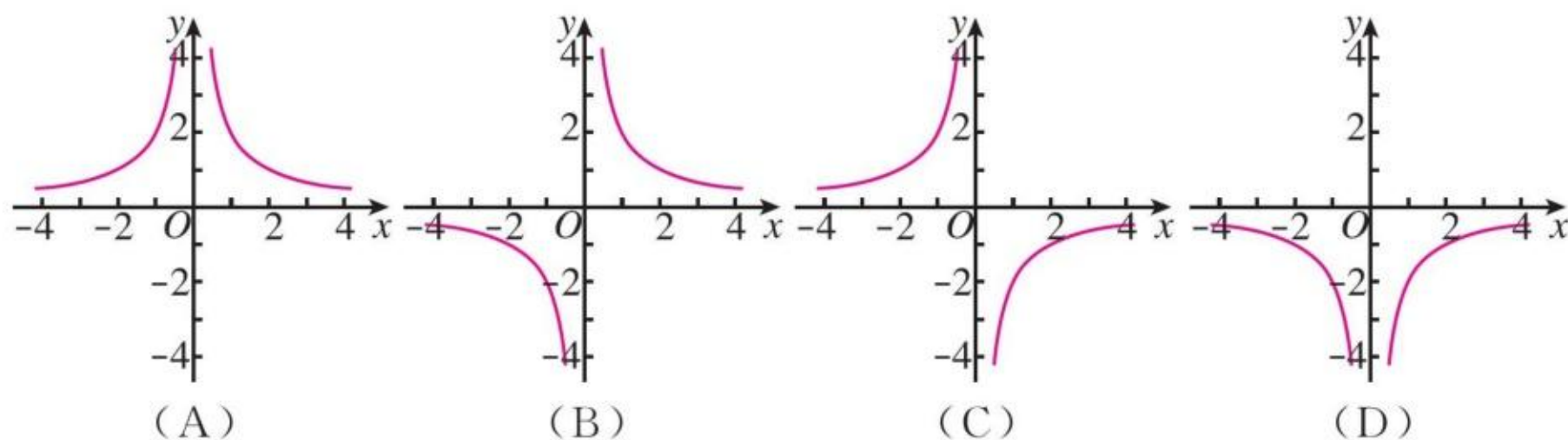
7. 已知某品牌显示器的寿命大约为 3×10^4 h.

(1) 这种显示器可工作的天数 d 与平均每天工作的小时数 t 之间具有怎样的函数关系?

(2) 如果平均每天工作 10 h, 那么这种显示器大约可使用多少天?

8. 把下列函数的解析式与其图象对应起来:

(1) $y = \frac{2}{x}$; (2) $y = \frac{2}{|x|}$; (3) $y = -\frac{2}{x}$; (4) $y = -\frac{2}{|x|}$.



(第 8 题)

拓展探索

9. 两个不同的反比例函数的图象是否有公共点? 为什么?

10. 在同一平面直角坐标系中, 若正比例函数 $y = k_1 x$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x}$ 的图象没有公共点, 确定 $k_1 k_2$ 的取值范围.

11. 市政府计划建设一项水利工程, 工程需要运送的土石方总量为 10^6 m^3 , 某运输公司承担了运送土石方的任务.

(1) 运输公司平均运送速度 v (单位: $\text{m}^3/\text{天}$) 与完成运送任务所需时间 t (单位: 天) 之间具有怎样的函数关系?

(2) 运输公司原有 100 辆卡车, 每天共可运送土石方 10^4 m^3 . 运送 40 天后, 由于工程进度的需要, 剩下的所有运输任务必须在 50 天内完成, 公司至少应增加多少辆卡车?

综合与实践

高铁列车运行中的数量关系

坐风驰电掣的高铁列车，看行稳致远的美丽中国。

我国高速铁路从无到有，由少到多，无论是建设，还是运营，都实现了跨越式发展。现在，我国是全球高铁建设速度最快、运营里程最长的国家。



活动目标

1. 科学、全面分析已有信息，通过假设、推理和运算，进行估计和判断，获得新的信息。
2. 对照估计获得的信息与真实信息，反思解决问题过程中的收获与不足。
3. 根据实际信息，推断高铁列车的大致运行状态。
4. 认识路程随时间均匀变化（一次函数），速度随时间均匀变化（一次函数），以及路程随时间非均匀变化（二次函数）的数学模型。
5. 全面认识“ $a=bc$ ”型的数量关系。

活动准备

1. 查阅相关资料，了解我国高速铁路的建设和运营情况，例如：第一条高速铁路通车时间，历年高速铁路通车里程，截至去年年底高速铁路通车总里程；高铁列车的型号、命名和运行时速；高铁列车之所以“高速”的原因。
2. 查阅相关资料，初步了解匀变速运动的概念，知道物体进行匀变速运动时，路程关于时间的函数解析式。

活动任务

活动一 根据高铁列车时刻表，获得信息、提出问题

任务1 图1是2026年3月“北京南—上海虹桥”的G13次“复兴号”高

铁列车的时刻表，你能由此表得到哪些信息？你能根据所得信息发现并提出哪些问题？

复兴号

16:00 G13 静 20:28

北京南 4小时28分 上海虹桥

二等 有票 一等 有票 商务 9张 无座 有票

站名	到时	发时	停留
北京南	----	16:00	----
济南西	17:22	17:24	2分
南京南	19:24	19:26	2分
上海虹桥	20:28	----	----

图 1

任务 2 根据从高铁列车时刻表中得到的信息，你能否解决自己提出的问题？如果不能，还需要获得哪些信息？

活动二 研究高铁列车运行路程、速度、时间之间的数量关系

2026 年 3 月 1 日，某乘客乘 G13 次“复兴号”京沪高铁列车，由北京南到上海虹桥。由时刻表知道，该列车行驶全程用时约 4.5 h，经停济南西、南京南两站，在两站均停留 2 min。从北京南到济南西行使用用时约 1.5 h，从济南西到南京南行使用用时 2 h，从南京南到上海虹桥行使用用时约 1 h。该乘客通过列车屏幕上的信息发现，列车大概在出站 15 min 后加速到最大值 350 km/h，在入站前 15 min 由 350 km/h 减速直至 0 km/h，在中间时间段近似以 350 km/h 的速度匀速行驶。

任务 1 根据上述信息，你能提出什么问题？

(1) 你能估计“北京南至济南西”的路程吗？“济南西至南京南”呢？“南京南至上海虹桥”呢？

(2) 列车在上述三段路线中的平均速度一样吗？不计算能判断吗？依据是什么？

(3) 京沪高铁全长大概是多少？列车的全程平均速度大概是多少？全程的平均速度等于每段平均速度的平均值吗？

(4) 画出列车运行全程中速度随时间变化的图象。

任务 2 研究高铁列车运行路程与时间之间的关系。

(1) 查询京沪高铁在这三段路线上的实际长度, 你的估计是否准确? 如果存在差异, 分析产生差异的可能原因.

(2) 假设列车在这三段路线的起始 t min、最后 t min 分别做匀变速运动, 中间阶段以 350 km/h 做匀速运动. 由这三段的实际路程, 以及列车时刻表, 描述 G13 次“复兴号”高铁列车的大致运行状态.

(3) 画出列车运行路程随时间变化的图象. 根据图象, 你还能提出并解决哪些问题?

活动三 问题的反思与拓展

任务 1 我们根据 G13 次“复兴号”高铁列车的时刻表, 以及运行状态, 估计了北京南至上海虹桥间的三段路程, 进而得到平均速度. 这里的关键是对运行状态的假设, 即分别在三段路线的起、止两个阶段做匀变速运动, 中间阶段做匀速运动.

实际上, 高铁列车的运行状态非常复杂, 绝对的匀速、匀变速几乎是不可能的. 但是, 这样的假设来自实践经验, 是对问题的简单化、理想化的描述, 可以使我们运用已有的知识研究问题, 这是科学研究常用的方法.

回顾上述解决问题的过程, 谈一谈你的体会.

任务 2 假设高铁相邻两站之间的路程为 s km, 列车在这段路程的运行时间为 t h, 运行的起始 t_1 h、最后 t_2 h 分别做匀变速运动, 中间阶段以 350 km/h 做匀速运动, 这时相邻两站之间的路程 s 关于时间 t, t_1, t_2 的代数表达式是什么?

活动过程

1. 组建合作团队

本次综合与实践活动需要团队协作. 在班级中组成 $5 \sim 8$ 人一组的研究小组, 每位同学参加其中一个小组, 每个小组确定一名负责人.

2. 方案构思

小组成员进行充分的讨论与交流, 集思广益, 形成解决上述任务的方案.

3. 方案实施

按照小组设计的方案进行任务分工, 使每位成员都有明确的任务, 根据规划的研究步骤实施, 完成活动任务, 形成研究报告.

4. 展示交流

制作向全班汇报的演示文稿，选出代表向全班同学展示本组的研究成果，分享实践过程中的活动经验、遇到的困难及其解决方法，反思活动中的不足。

活动评价

通过成果展示与交流，基于各组完成的研究报告，根据情况选择任务完成表、表现评分表、自我反思表等进行评价。与老师和全班同学一起，通过质疑、辩论、评价，总结成果，分享体会，分析不足，开展自我评价、同学评价和教师评价，完成本次综合与实践活动。

第二十八章 旋转

在我们的生活中，能看到许多转动着的物体，如车轮、风力发电机、直升机的螺旋桨、时钟的指针、水车……。我们生活在一个处处能见到旋转现象的世界中。

在数学中，与平移、轴对称一样，旋转也是一种图形变化。我们应该怎样描述旋转呢？旋转又有什么性质呢？本章我们将应用研究平移、轴对称的方法研究这些问题。另外，在本章中我们还要学习一类特殊的旋转——中心对称，并综合应用平移、轴对称和旋转等进行图案设计，由此加深对图形变化的认识。

让我们一起来探索旋转的奥秘吧！



28.1 图形的旋转

在我们身边，旋转现象随处可见. 用数学的眼光观察这些旋转现象，如何描述它们？如何画出一个图形旋转后的图形？

思考

如图 28.1-1，钟表的指针在不停地转动，从 3 时到 5 时，时针转动了多少度？

如图 28.1-2，风车风轮的每个叶片在风的吹动下转动到新的位置.

如图 28.1-3，改变航向时，舵柄绕船舵中间的轴转动.

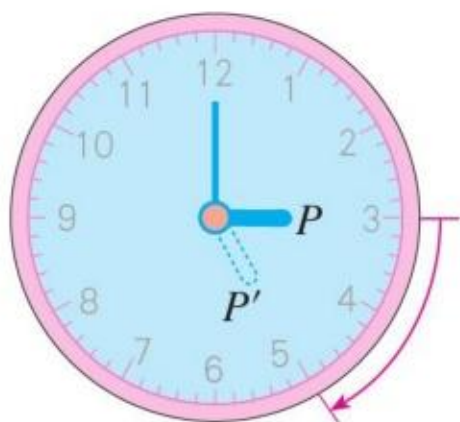


图 28.1-1

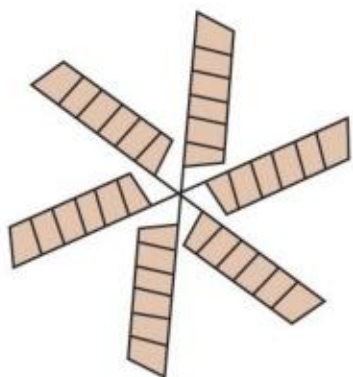


图 28.1-2



图 28.1-3

以上这些运动现象有什么共同特点呢？

我们可以把上面问题中的指针、叶片、舵柄看作平面图形，这些图形都在平面内围绕着一个点转动. 像这样，把一个平面图形绕着平面内某一点 O 转动一个角度，叫作图形的**旋转** (rotation)，点 O 叫作**旋转中心**，转动的角叫作**旋转角**. 如果图形上的点 P 经过旋转后变为点 P' ，那么这两个点叫作这个旋转的**对应点**. 例如，在图 28.1-1 中，时针在旋转，表盘的中心是旋转中心，旋转角是 60° ，在 3 时的时针端点 P 与在 5 时的时针端点 P' 是对应点.

下面研究旋转的性质.

显然，旋转前后，图形的形状、大小未发生变化. 也就是说，**旋转前后的图形全等**.

接下来，类比对平移、轴对称的研究，我们研究图形旋转前后对应点之间的关系.

探究

如图 28.1-4, 利用以下方法或信息技术工具, 将 $\triangle ABC$ 绕点 O 旋转一个角度, 得到 $\triangle A'B'C'$.

(1) 在硬纸板上, 挖一个三角形洞, 再另扎一个小点 O 作为旋转中心.

(2) 硬纸板下面放一张白纸, 先在纸上描出这个挖掉的三角形图案 ($\triangle ABC$), 然后围绕旋转中心 O 转动硬纸板, 再描出这个挖掉的三角形 ($\triangle A'B'C'$), 移开硬纸板.

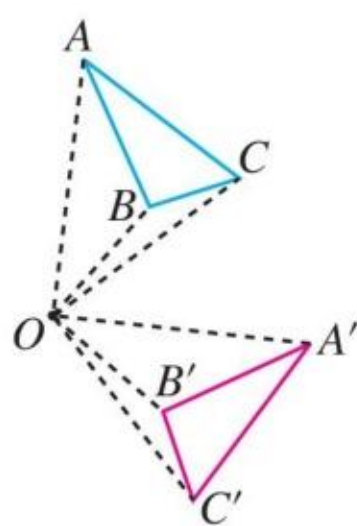


图 28.1-4

观察 OA 与 OA' , OB 与 OB' , OC 与 OC' , 你有什么发现? $\angle AOA'$, $\angle BOB'$, $\angle COC'$ 有什么关系? 通过测量检验你的发现.

可以发现, $OA=OA'$, $OB=OB'$, $OC=OC'$; $\angle AOA'=\angle BOB'=\angle COC'$. 一般地, 旋转具有性质:

一个图形和其旋转得到的图形中, 对应点到旋转中心的距离相等; 对应点与旋转中心所连线段所成的角相等, 都等于旋转角.

例 1 如图 28.1-5, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 35° , 得到 $\triangle A'B'C$, 若 $\angle BCA' = 100^\circ$, 求 $\angle B'CA$ 的度数.

解: 由旋转的性质可知,

$$\angle BCB' = \angle ACA' = 35^\circ.$$

又因为 $\angle BCB' + \angle B'CA + \angle ACA' = \angle BCA' = 100^\circ$,
所以 $\angle B'CA = 30^\circ$.

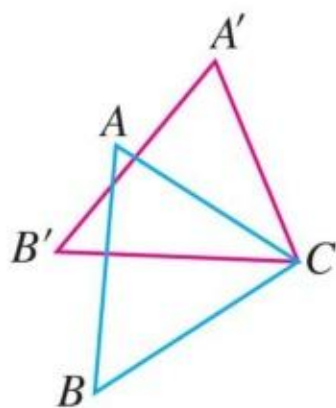


图 28.1-5

练习

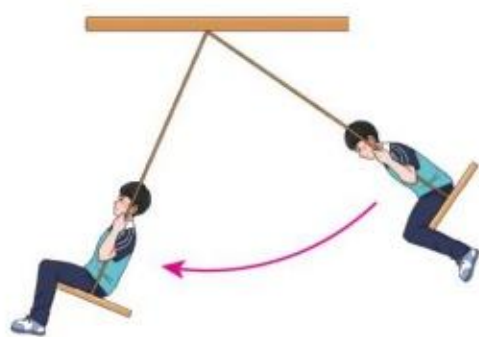
1. 举出一些现实生活、生产中旋转的实例, 并指出旋转中心和旋转角.

2. 如图, 杠杆绕支点转动撬起重物, 杠杆的旋转中心在哪里? 旋转角是哪个角?



(第 2 题)

3. 如图, 男生坐在秋千上, 秋千旋转了 80° . 在图中男生身上任意选一点 P , 利用旋转的性质, 标出点 P 的对应点.



- (1) 这两个点到旋转中心的距离有怎样的关系?
- (2) 这两个点与旋转中心所连线段所成的角是多少度?

(第3题)

给定一个点和一个图形, 可以画出这个图形绕这个点旋转一定角度后得到的图形.

与平移、轴对称类似, 在画旋转得到的图形时, 对于一些规则的几何图形(如三角形、矩形), 只要画出一些关键点(如三角形、矩形的顶点)的对应点, 连接这些对应点, 就可以画出旋转后的图形.

例2 如图 28.1-6, E 是正方形 $ABCD$ 的边 CD 上任意一点, 以点 A 为旋转中心, 把 $\triangle ADE$ 顺时针旋转 90° , 画出旋转后的图形.

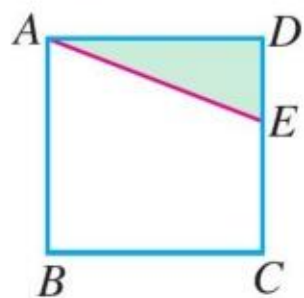


图 28.1-6

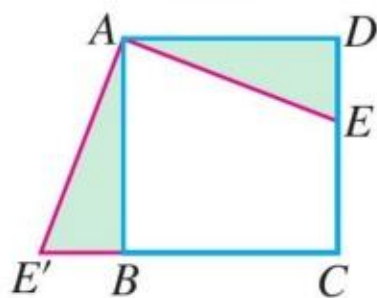


图 28.1-7

分析: 画图的关键是确定 $\triangle ADE$ 三个顶点的对应点的位置.

解: 因为点 A 是旋转中心, 所以它的对应点是它本身.

还有其他方法确定旋转后的图形吗?

在正方形 $ABCD$ 中, $AD=AB$, $\angle DAB=90^\circ$, 所以旋转后点 D 与点 B 重合.

设点 E 的对应点为 E' . 因为旋转后的图形与旋转前的图形全等, 所以 $\angle ABE' = \angle ADE = 90^\circ$, $BE' = DE$.

因此, 在 CB 的延长线上取点 E' , 使 $BE' = DE$, 则 $\triangle ABE'$ 为旋转后的图形 (图 28.1-7).

利用旋转, 可以设计美丽的图案. 如图 28.1-8(1), 将一个等腰三角形绕着它正下方的一点旋转, 就可以得到图 28.1-8(2) 中的五角星图案.

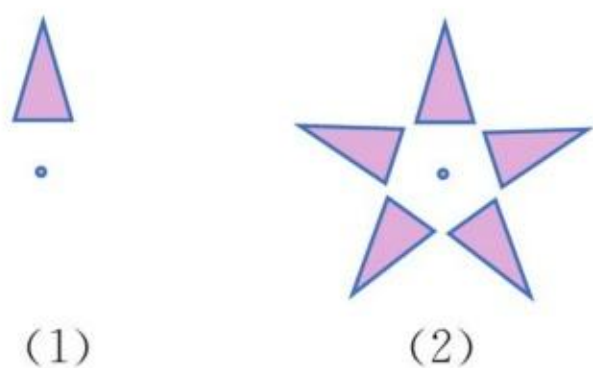


图 28.1-8

想一想, 需要旋转几次, 每次的旋转角是多少?

当选择不同的旋转中心、不同的旋转角旋转同一个图案(图 28.1-9)时, 会出现不同的效果.



图 28.1-9

在图 28.1-10 的两个旋转中, 旋转中心不变, 旋转角改变了, 产生了不同的旋转效果.

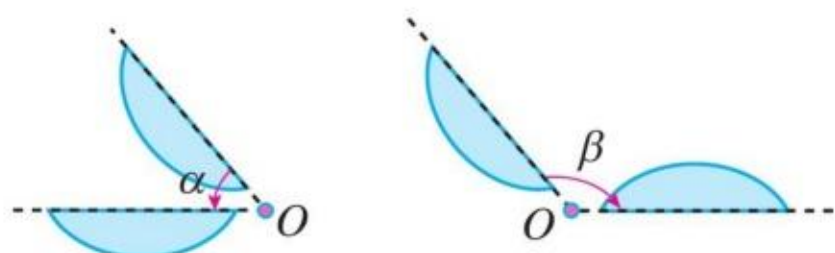


图 28.1-10

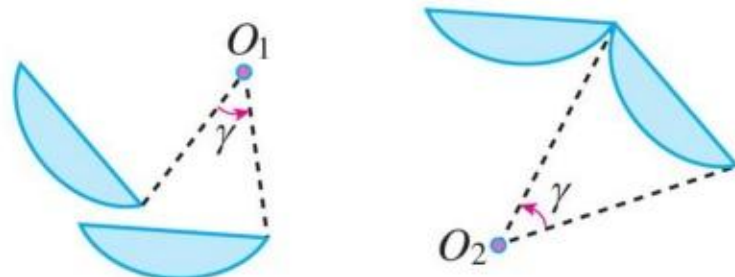


图 28.1-11

在图 28.1-11 的两个旋转中, 旋转角不变, 旋转中心改变了, 产生了不同的旋转效果.

经过多次旋转, 可以得到多个美丽的图案(图 28.1-12).

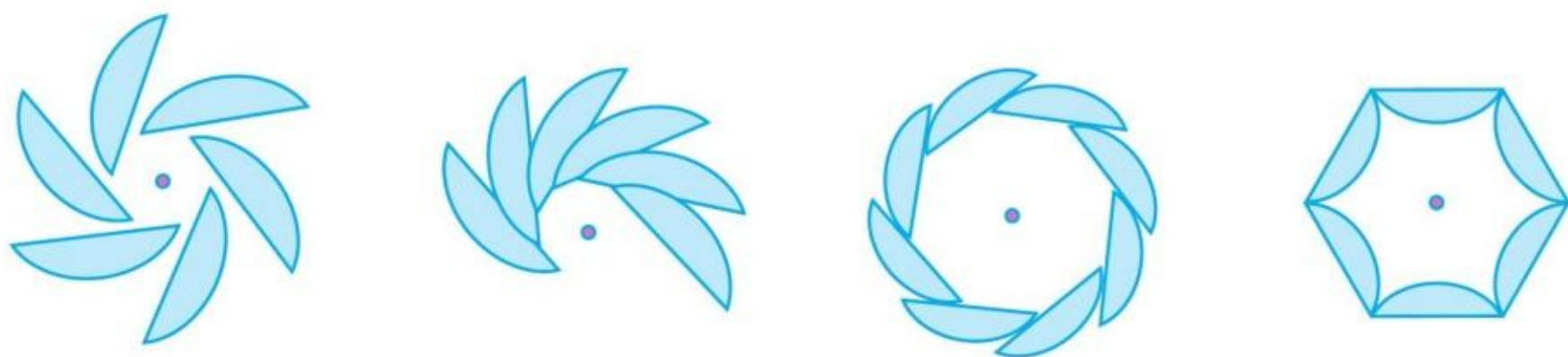
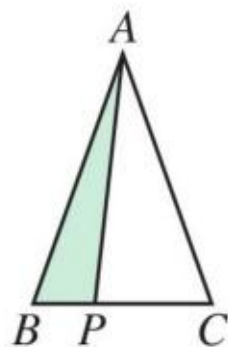


图 28.1-12

练习

- 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, P 是边 BC 上一点. 以点 A 为旋转中心, 取旋转角等于 $\angle BAC$, 把 $\triangle ABP$ 逆时针旋转, 画出旋转后的图形.
- 选择一个简单的基本图形, 对它进行旋转:
 - 选择不同的旋转中心、不同的旋转角, 观察旋转后的效果;
 - 改变基本图形的形状, 观察旋转后的效果.

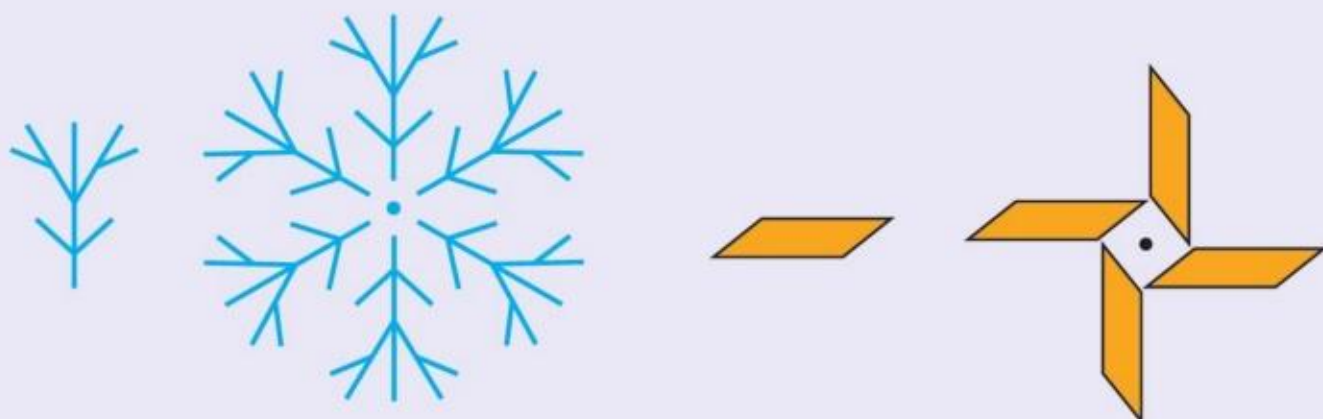


(第 1 题)

习题 28.1

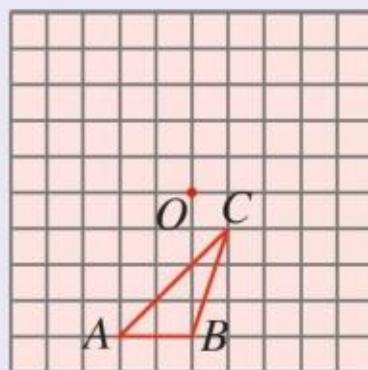
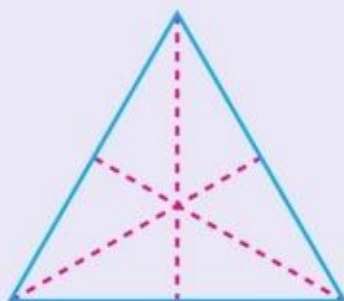
复习巩固

1. 下列图形是由一个基本的图形经过旋转得到的，分别指出它们的旋转中心和旋转角：



(第 1 题)

2. 把图中的五角星图案，绕着它的中心 O 旋转，旋转角至少为多少度时，旋转后的五角星能与自身重合？对等边三角形进行类似的讨论.



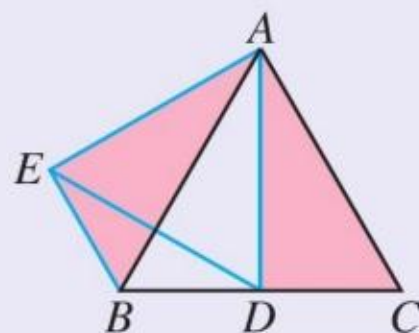
(第 2 题)

(第 3 题)

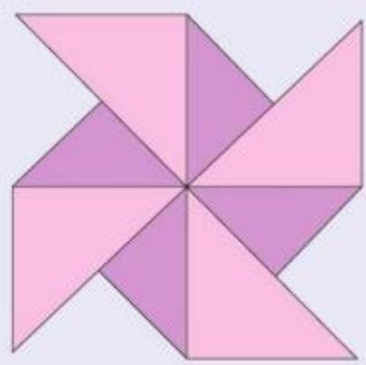
3. 如图，分别画出 $\triangle ABC$ 绕点 O 逆时针旋转 90° 和 180° 后得到的图形.
4. 任意画一个 $\triangle ABC$ ，并把它旋转：
 - (1) 以点 A 为旋转中心，把 $\triangle ABC$ 逆时针旋转 40° ；
 - (2) 以边 BC 的中点为旋转中心，把 $\triangle ABC$ 顺时针旋转 90° ；
 - (3) 在 $\triangle ABC$ 内任取一点为旋转中心，把 $\triangle ABC$ 逆时针旋转 180° ；
 - (4) 在 $\triangle ABC$ 外任取一点为旋转中心，把 $\triangle ABC$ 顺时针旋转 120° .

综合运用

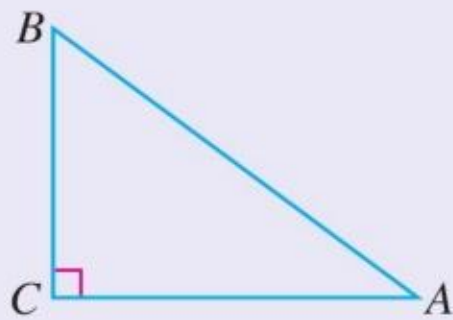
5. 如图， $\triangle ABC$ 是一个等边三角形， D 为边 BC 的中点，把 $\triangle ADC$ 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle AEB$ ，求 $\angle ABE$ ， $\angle DAE$ ， $\angle BED$ 的度数.
6. 图中的风车图案，可以由哪个基本的图形、经过什么样的旋转得到？试着由基本图形，经旋转画出这个图案.



(第 5 题)



(第6题)



(第7题)

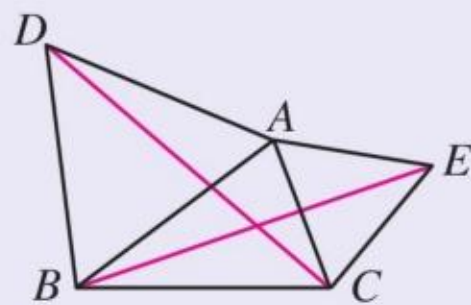
7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$.

(1) 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针旋转 90° , 画出旋转后的三角形;

(2) 按 (1) 旋转后, 点 A 的对应点为 A' , 若 $BC=3$, $AC=4$, 求 $A'A$ 的长.

拓广探索

8. 如图, $\triangle ABD$, $\triangle AEC$ 都是等边三角形. BE 与 DC 有什么关系? 你能用旋转的性质说明上述关系成立的理由吗? 试提出一个类似的问题. (提示: 将等边三角形换成其他图形.)



(第8题)

阅读与思考

全等变换

在数学中, 按照某种方法把一个图形变成另一个图形, 叫作图形变换. 图形变换在机械工程、航空制造、计算机辅助设计等领域有着广泛的应用. 例如在计算机图形学中, 经过图形变换, 可以由简单的图形生成复杂的图形, 可以用二维图形表示三维图形, 甚至静态图形通过多次变换, 可以呈现动态显示效果等 (图 1).

平移、轴对称和旋转都是图形变换, 你能发现它们有什么共性吗?

可以发现, 经过这三种变换, 虽然图形位置变化了, 但图形的形状、大小没有改变, 即变换前后的图形全等. 像这样, 只改变图形的位置, 而不改变其形状、大小的图形变换, 叫作全等变换. 在全等变换中, 图形上任意两点间的



图 1

距离保持不变，图形上任意三点所成的角保持不变.

下面，我们以三角形的旋转为例，说明线段长度和角的大小经过旋转后保持不变.

如图 2，将 $\triangle ABC$ 绕点 O 旋转，得到 $\triangle A'B'C'$ ，由旋转的性质可知， $OA=OA'$ ， $OB=OB'$ ， $\angle AOA'=\angle BOB'$ ，于是， $\triangle AOB \cong \triangle A'OB'$ ，进而 $AB=A'B'$.

同理可知， $AC=A'C'$ ， $BC=B'C'$ ，从而 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ，于是 $\angle ABC=\angle A'B'C'$ ， $\angle ACB=\angle A'C'B'$ ， $\angle BAC=\angle B'A'C'$.

一般地，在旋转过程中， $\triangle ABC$ 上任意两点间的距离保持不变，任意三点所成的角保持不变.

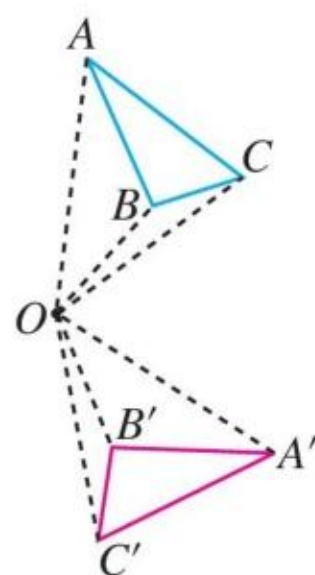


图 2

28.2 中心对称

前面，我们研究了旋转及其性质，现在来研究一类特殊的旋转——中心对称.

28.2.1 中心对称及其性质

思考

(1) 如图 28.2-1，把其中一个图案绕点 O 旋转 180° ，你有什么发现？

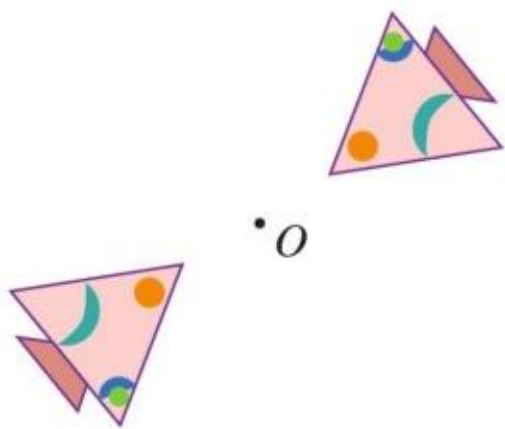


图 28.2-1

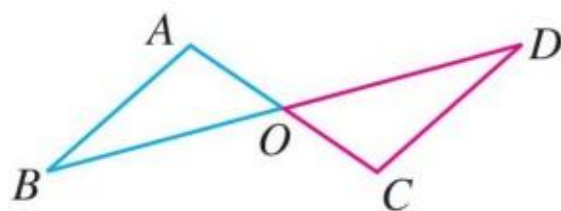


图 28.2-2

(2) 如图 28.2-2，线段 AC ， BD 相交于点 O ， $OA=OC$ ， $OB=OD$. 把 $\triangle OCD$ 绕点 O 旋转 180° ，你有什么发现？

可以发现，在图 28.2-1 中，一个图案旋转后与另一个图案重合；在图 28.2-2 中，旋转后的 $\triangle OCD$ 与 $\triangle OAB$ 重合.

像这样，一个图形绕着某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能与另一个图形重合，那么就说这两个图形关于这个点对称或中心对称 (central symmetry)，这个点叫作对称中心 (简称中心)，这两个图形在旋转后能重合的点叫作对称点. 例如，在图 28.2-2 中， $\triangle OCD$ 和 $\triangle OAB$ 关于点 O 对称，点 C 与点 A 是对称点.

你还能指出其他对称点吗？

作为特殊的旋转，中心对称具有旋转的性质. 除此之外，中心对称还有什么特殊的性质呢？

探究

如图 28.2-3, $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 关于点 O 对称, 我们仍考虑它们的对称点之间的关系.

对称中心 O 与对称点的连线 AA' 有什么关系? 点 O 与 BB' , CC' 呢?

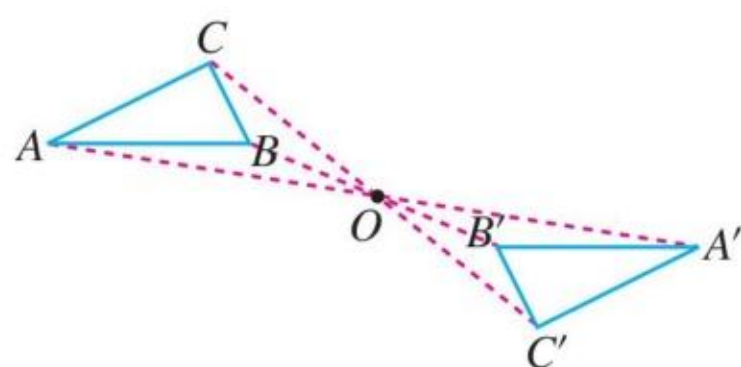


图 28.2-3

因为点 A' 是点 A 绕点 O 旋转 180° 后得到的, 所以点 O 是线段 AA' 的中点. 同样地, 点 O 也是线段 BB' 和 CC' 的中点.

由此, 中心对称除了具有旋转的性质, 还具有性质:

成中心对称的两个图形中, 对称点所连线段经过对称中心, 并且被对称中心平分.

给定一个点和一个图形, 可以画出与这个图形关于这个点中心对称的图形. 与其他图形的变化类似, 对于规则几何图形, 只要找到它的关键点, 作出它们关于对称中心的对称点, 连接这些对称点, 就可以得到与原图形中心对称的图形.

例 1 如图 28.2-4, 选择点 O 为对称中心, 作出与 $\triangle ABC$ 关于点 O 对称的 $\triangle A'B'C'$.

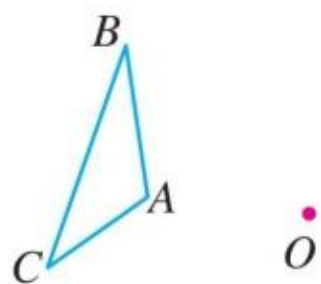


图 28.2-4

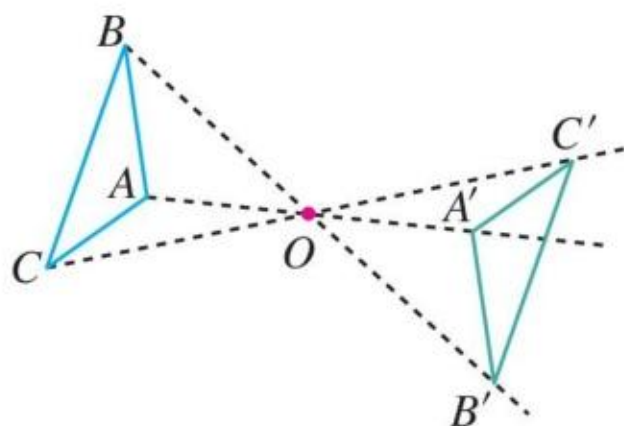


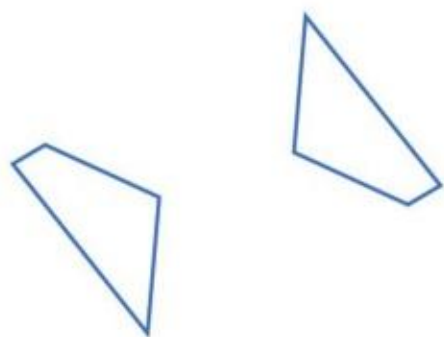
图 28.2-5

分析: 关键是利用中心对称的性质确定 $\triangle ABC$ 三个顶点的对称点.

解: 如图 28.2-5, 连接 AO , 在 AO 的延长线上截取 $OA' = OA$, 即可以得到点 A 关于点 O 的对称点 A' . 以同样的方法分别作出点 B , C 关于点 O 的对称点 B' , C' , 依次连接 $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, 就得到与 $\triangle ABC$ 关于点 O 对称的 $\triangle A'B'C'$.

练习

1. 图中的两个四边形关于某点对称, 标出它们的对称中心.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 分别作出已知图形关于点 O 对称的图形.

28.2.2 中心对称图形

在轴对称的学习中, 我们既学习了两个图形成轴对称, 也学习了轴对称图形. 类似地, 有两个图形关于某个点中心对称, 是不是也有中心对称图形呢?

思考

(1) 如图 28.2-6, 将线段 AB 绕它的中点 O 旋转 180° , 你有什么发现?



图 28.2-6

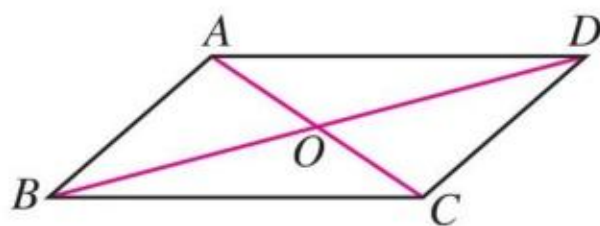


图 28.2-7

(2) 如图 28.2-7, 将 $\square ABCD$ 绕它的两条对角线的交点 O 旋转 180° , 你有什么发现?

可以发现, 线段 AB 绕它的中点 O 旋转 180° 后与它本身重合. $\square ABCD$ 绕它的两条对角线的交点 O 旋转 180° 后与它本身重合. 像这样, 把一个图形绕着某一个点旋转 180° , 如果旋转后的图形能够与原来的图形重合, 那么这个图形叫作 **中心对称图形**, 这个点就是它的 **对称中心**.

由上可得, 线段、平行四边形都是中心对称图形.

利用中心对称的性质, 如何确定一个中心对称图形的对称中心? 线段、平行四边形的对称中心分别是什么?

矩形、菱形、正方形不仅是轴对称图形，也是中心对称图形，它们的对称轴的交点就是其对称中心（图 28.2-8）.

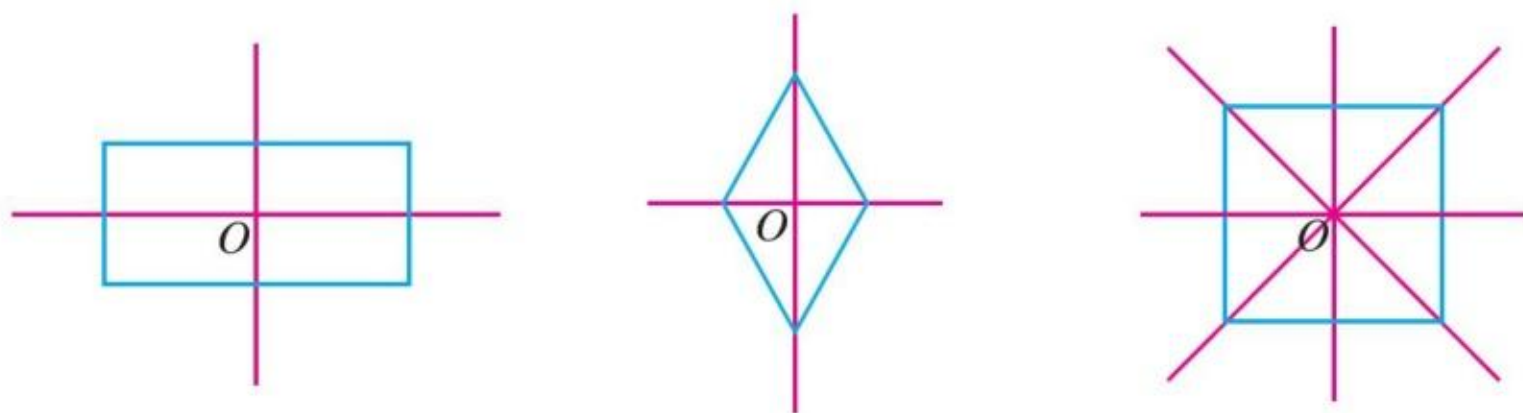


图 28.2-8

中心对称图形的形状通常匀称美观，在自然界中可以看到许多美丽的中心对称图形（图 28.2-9(1)），在很多建筑物和工艺品中也常采用中心对称图形作装饰图案（图 28.2-9(2)）。另外，由于具有中心对称图形形状的物体，能够在其所在平面内绕对称中心平稳地旋转，所以常将各种机器中需要旋转的零部件的形状设计成中心对称图形，如水泵叶轮（图 28.2-9(3)）.

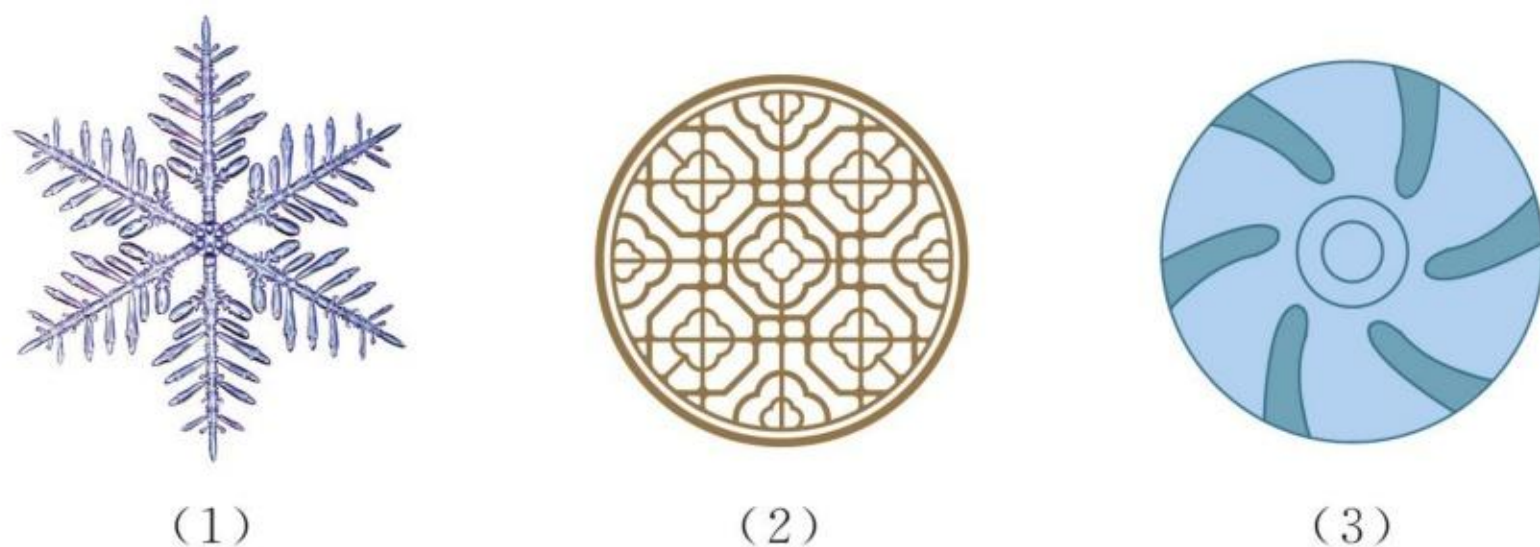


图 28.2-9

练习

1. 圆是中心对称图形吗？为什么？
2. 在以下交通标志图案中，哪些是中心对称图形？再举出几个自然界以及生活、生产中的中心对称图形实例.



（第 2 题）

28.2.3 关于原点对称的点的坐标

我们已经学习了关于坐标轴对称的点的坐标之间的关系，类似地，下面来研究关于原点对称的点的坐标之间的关系。

探究

如图 28.2-10，在平面直角坐标系中，作出下列已知点关于原点的对称点，并写出它们的坐标。

$A(4, 0)$, $B(0, -3)$, $C(2, 1)$, $D(-1, 2)$,
 $E(-3, -4)$.

这些坐标与已知点的坐标有什么关系？

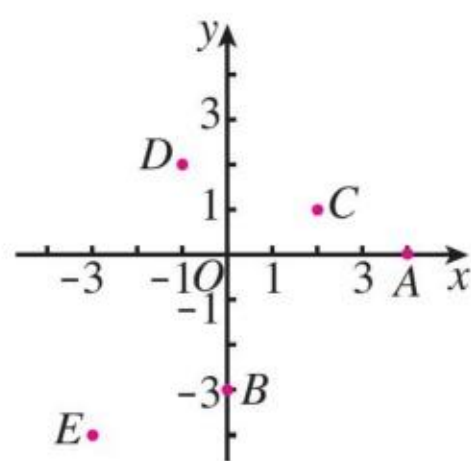


图 28.2-10

归纳

两个点关于原点对称时，它们的坐标符号相反，即点 $P(x, y)$ 关于原点的对称点为 $P'(-x, -y)$ 。

利用上述规律，可以在平面直角坐标系中作出与一个图形关于原点对称的图形。对于一些规则几何图形，与在平面直角坐标系中作关于坐标轴对称的图形类似，只要先求出已知图形中的一些特殊点（如多边形的顶点）关于原点对称的点的坐标，描出并连接这些点，就可以得到与这个图形关于原点对称的图形。

例 2 如图 28.2-11，利用关于原点对称的点的坐标的关系，作出与 $\triangle ABC$ 关于原点对称的图形。

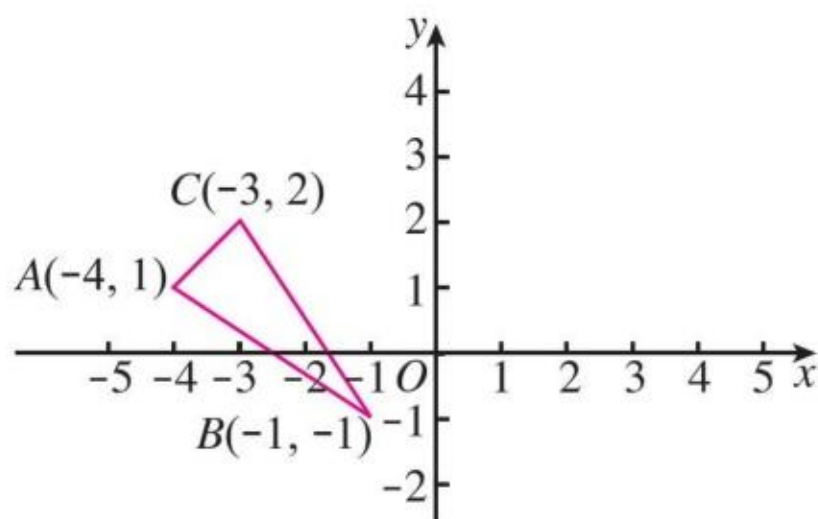


图 28.2-11

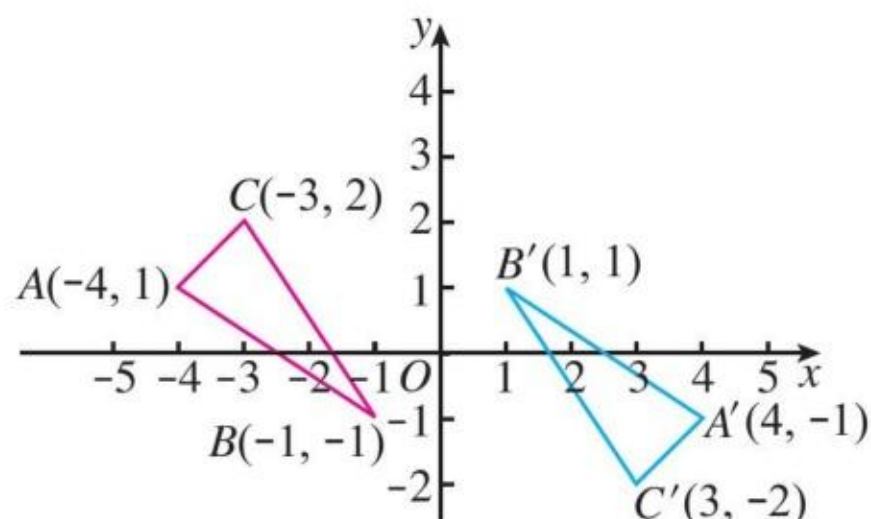


图 28.2-12

解：点 $P(x, y)$ 关于原点的对称点为 $P'(-x, -y)$ ，因此 $\triangle ABC$ 的三

个顶点 $A(-4, 1)$, $B(-1, -1)$, $C(-3, 2)$ 关于原点的对称点分别为 $A'(4, -1)$, $B'(1, 1)$, $C'(3, -2)$. 依次连接 $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, 就可得到与 $\triangle ABC$ 关于原点对称的 $\triangle A'B'C'$ (图 28.2-12).

练习

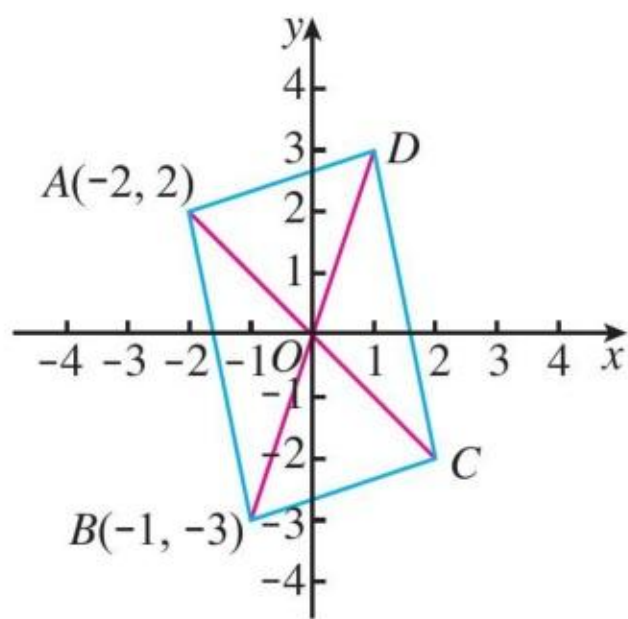
1. 下列各点中, 哪两个点关于原点对称?

$A(-5, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, -1)$, $D(2, 0)$,
 $E(0, 5)$, $F(-2, 1)$, $G(-2, -1)$.

2. 写出下列各点关于原点的对称点 A' , B' , C' , D' 的坐标:

$A(3, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(-1, -2)$,
 $D(2, -3)$.

3. 如图, $\square ABCD$ 的对角线相交于原点, 其顶点 A , B 的坐标分别为 $(-2, 2)$ 和 $(-1, -3)$. 求其顶点 C , D 的坐标.



(第3题)

习题 28.2

复习巩固

1. 分别作出与下列图形关于点 O 对称的图形:



(第1题)

2. 下列图形是中心对称图形吗? 如果是, 指出其对称中心.



“禁止”标志



三叶风扇



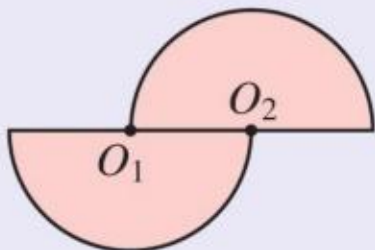
蜂巢图案

(第2题)

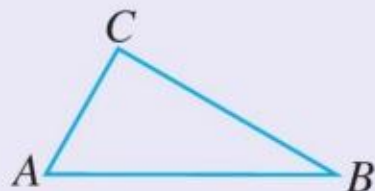
3. 四边形 $ABCD$ 各顶点坐标分别为 $A(5, 0)$, $B(-2, 3)$, $C(-3, 0)$, $D(-1, -5)$, 作出与四边形 $ABCD$ 关于原点对称的图形.
4. 已知点 $A(a, 1)$ 与点 $A'(5, b)$ 关于原点对称, 求 a, b 的值.

综合运用

5. 如图, 点 O_1, O_2 分别是两个半圆的圆心, 这个图形是中心对称图形吗? 如果是, 指出对称中心; 如果不是, 说明理由.

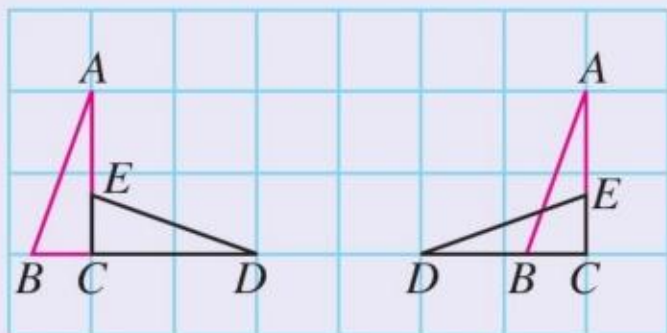


(第5题)



(第6题)

6. 如图, 已知 $\triangle ABC$, 能否通过平移、轴对称或旋转, 得到另一个三角形, 使得这两个三角形能够拼成一个以 AC, AB 为邻边的平行四边形?
7. 如图, 说明如何通过平移、轴对称或旋转, 由 $\triangle ABC$ 得到 $\triangle DEC$.

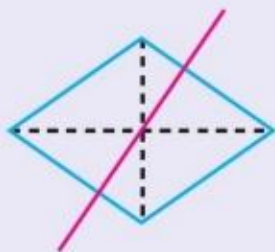


(第7题)

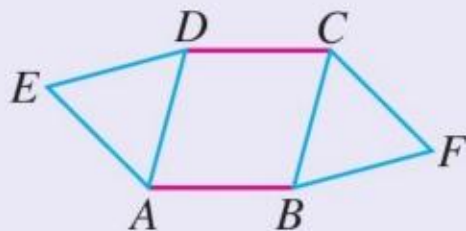
8. 有一块邻边长分别为 10 m , 6 m 的矩形园地, 要在园地上开辟一个花坛, 使花坛面积是园地面积的一半, 并且花坛形状是中心对称图形, 该如何设计 (提供两种设计方案)?
9. 在平面直角坐标系中, 作点 $A(-3, 2)$ 关于 x 轴的对称点 B , 再作点 B 关于 y 轴的对称点 C , 写出点 C 的坐标, 点 A 与点 C 有何关系? 由此, 你能发现什么?

拓广探索

10. 如图, 过菱形对角线交点的一条直线把菱形分成了两个梯形, 这两个梯形全等吗? 为什么?



(第10题)



(第11题)

11. 如图, $\triangle ADE$ 和 $\triangle CBF$ 是 $\square ABCD$ 外的两个等边三角形, 用旋转的知识说明 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CBF$ 成中心对称.

阅读与思考

旋转对称图形

观察图 1 中的几幅图案，你能发现其对应的图形有什么共同特点吗？

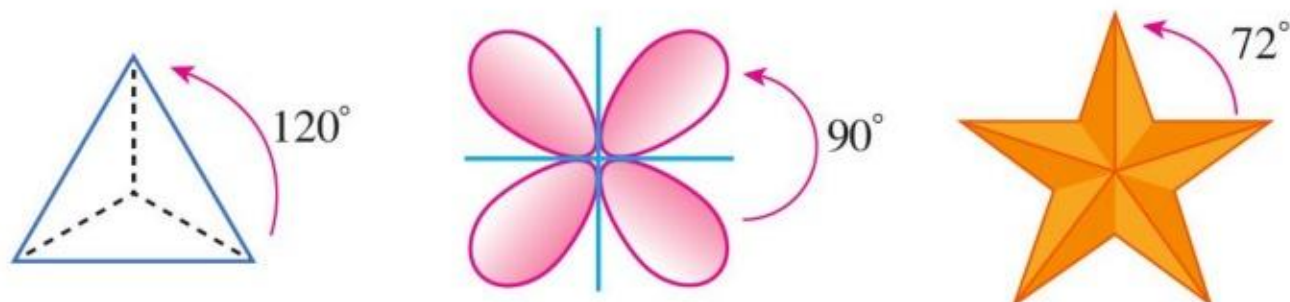


图 1

可以发现，分别将这些图形绕着某点旋转一定的角度，得到的新图形与原图形完全重合。像这样，一个平面图形绕着平面上某点 O 旋转角 α ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$)，如果得到的新图形与原图形完全重合，那么称这个图形是旋转对称图形，它关于旋转中心具有角 α 的旋转对称性。中心对称图形就是一种特殊的旋转对称图形，它关于对称中心有 180° 的旋转对称性。

想一想，正多边形都是旋转对称图形吗？它们具有怎样的旋转对称性？

利用旋转对称，可以设计出美丽的图案。例如图 2 中的风车图案是一个旋转角为 120° 的旋转对称图形；在我国香港特别行政区区徽（图 3）中，紫荆花图案是一个旋转角为 72° 的旋转对称图形。

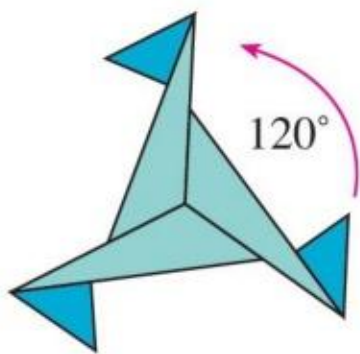


图 2



图 3

在所有旋转对称图形中，圆是最特殊的，它关于圆心有任意角的旋转对称性。应用圆的这个性质，给我们的生活和生产带来了很多的方便，许多物体设计成圆形就是应用了这个性质。学习了圆的更多知识后，你会对圆的这个性质有更加深刻的认识。

信息技术应用

探索反比例函数图象的对称性

信息技术工具不仅可以帮助我们便捷、迅速地绘制各种函数图象，而且能帮助我们研究函数的性质. 例如，双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 有怎样的对称性？如何描述它的对称性？

利用信息技术工具画出反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象，在图象上任意取一点 A ，作点 A 关于原点的对称点 A_1 ，拖动点 A ，可以看出点 A_1 在图象的另一分支上随之运动（图 1）. 由此发现，反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象关于原点中心对称.

利用信息技术工具画出 $y = \frac{k}{x}$ 的图象，改变 k 的大小，分别得到两簇双曲线（图 2，图 3）. 由图 2 和图 3，可以猜想：双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 是中心对称图形，它的对称中心是平面直角坐标系的原点. 这个猜想可以由函数解析式证明，请你试一试.

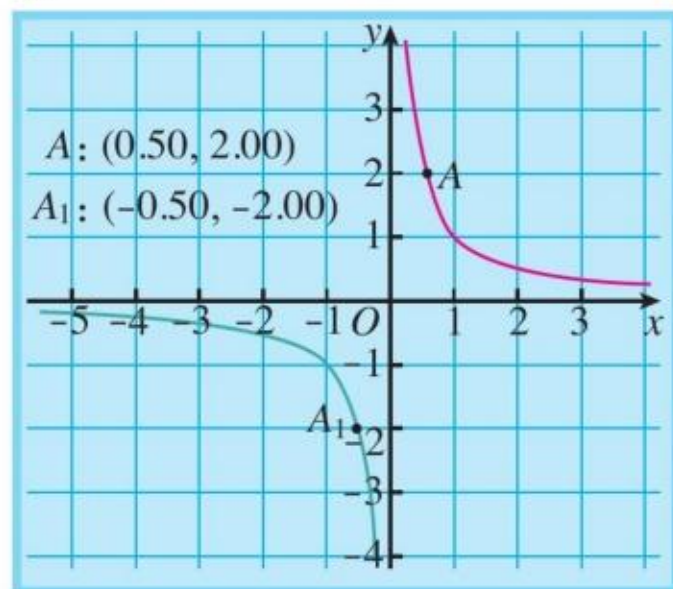


图 1

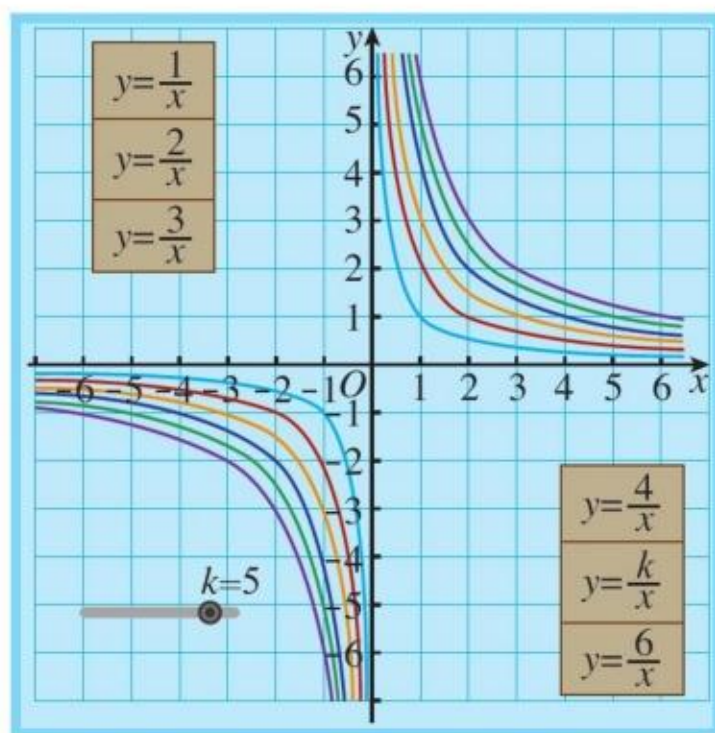


图 2

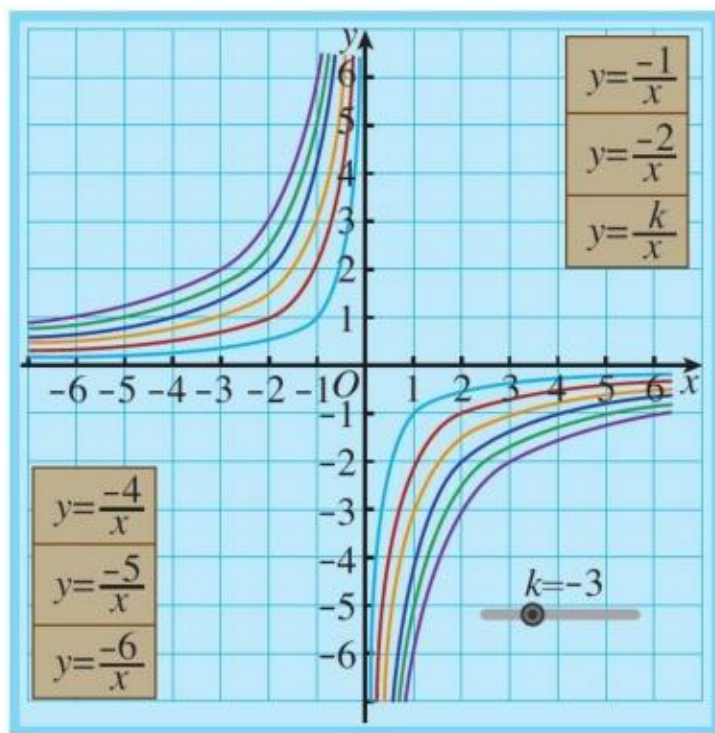


图 3

除了中心对称，根据图 2 和图 3，你还可以尝试探究以下问题：双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 是不是轴对称图形？你还能发现和提出一些问题，并分析和解决它们吗？

数学活动

活动 利用图形变化设计图案

我们可以利用平移、轴对称和旋转中的一种进行图案设计,还可以利用它们的组合进行图案设计.例如,图1中的图案就是由一个基本图形经过旋转、轴对称和平移得到的.你能指出这个基本图形吗?

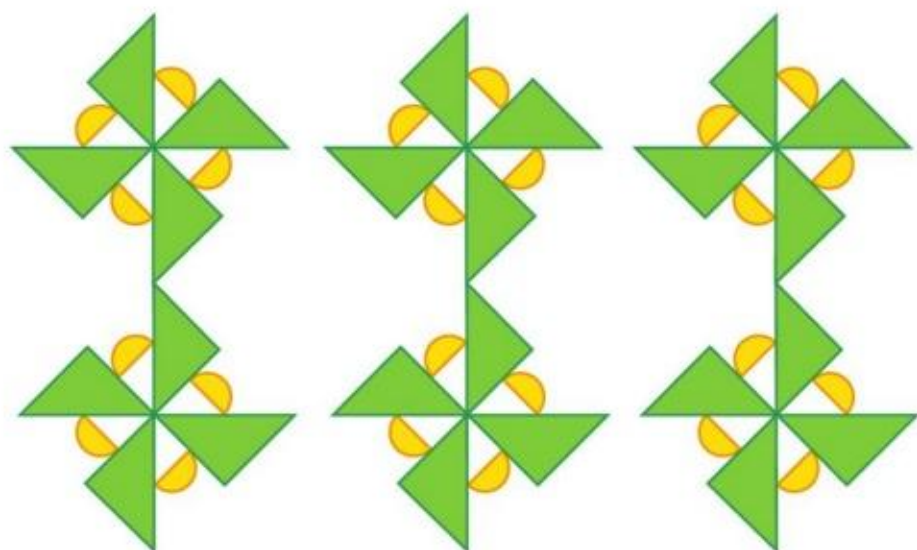


图1

如图2,以点 O 为旋转中心,将图形逆时针旋转 90° 三次作出图3,然后以 l 为对称轴作出图4,平移图4就可以得到图1中的图案.



图2



图3

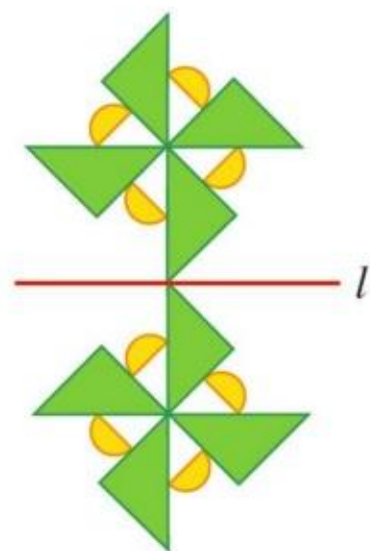
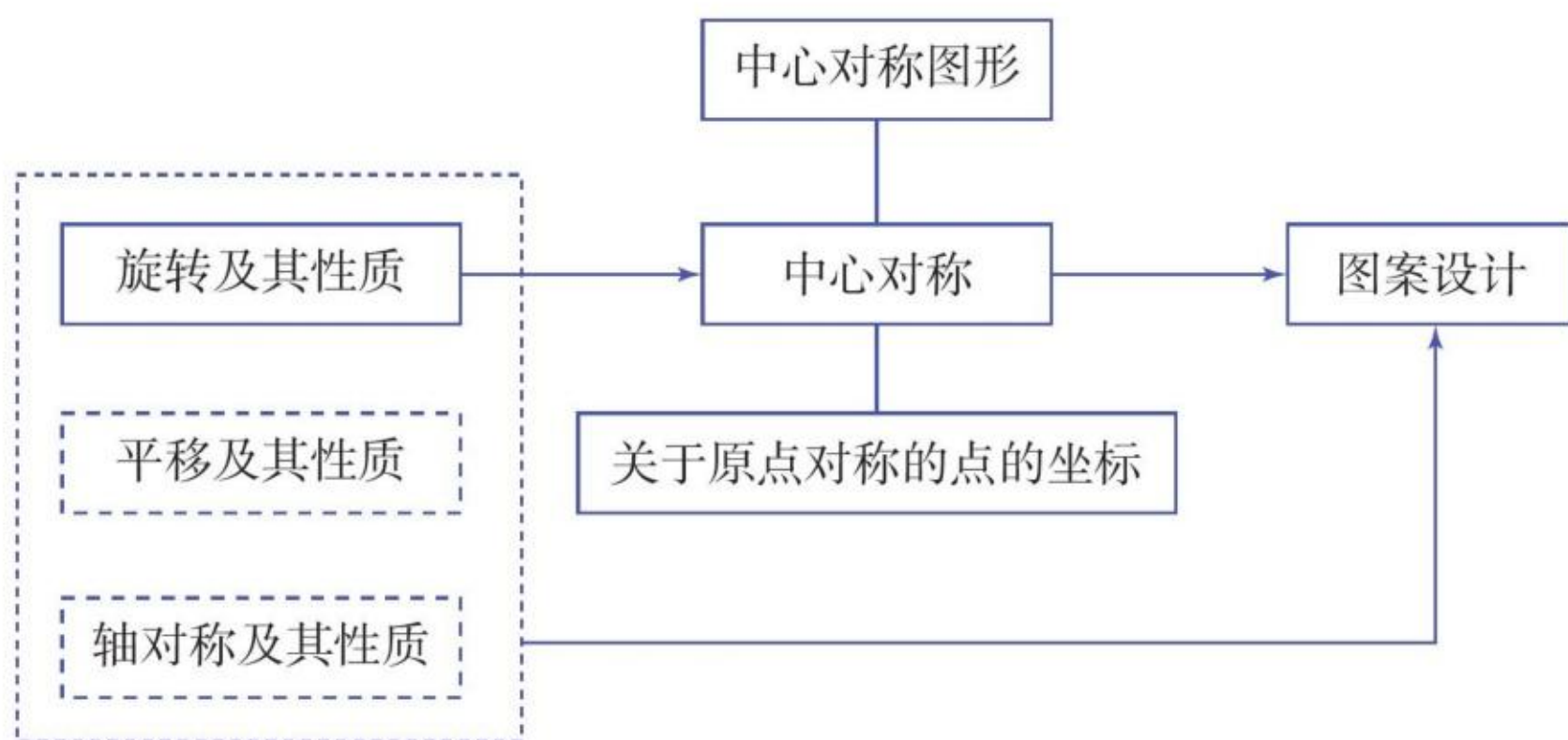


图4

类似地,还可以运用图形的平移、轴对称和旋转的组合进行其他图案设计.试试看,并与同学互相交流.

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

在现实生活中，旋转现象是普遍存在的. 在本章中，我们类比平移、轴对称，从生活中的旋转现象出发，抽象得到平面图形的旋转的概念，通过探究旋转前后图形的对应点之间的关系，得到了旋转的性质，并利用旋转的性质学习了如何画旋转后的图形. 在这个过程中，我们用数学的语言表达现实世界中相关现象的能力得到了提升.

中心对称是旋转的特殊情况，是旋转角为 180° 的旋转. 对于中心对称，我们也是从图形变化前后对应点的关系着手，研究了其特殊的性质，并进一步学习了中心对称图形，以及在平面直角坐标系中关于原点对称的点的坐标的关系. 中心对称和中心对称图形既有区别又有联系，它们之间的关系与轴对称和轴对称图形之间的关系是类似的.

与平移、轴对称一样，旋转前后的图形也全等. 这些图形变化在生产、生活和图案设计中具有广泛的应用.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 你能举出一些平面图形旋转的实例吗？平面图形的旋转有哪些性质？
2. 作为一种特殊的旋转，中心对称有什么特殊的性质？
3. 中心对称图形有什么特点？你能举出一些中心对称图形的例子吗？
4. 中心对称和中心对称图形有什么区别和联系？
5. 在平面直角坐标系中，关于原点对称的点的坐标有什么关系？
6. 综合应用平移、轴对称、旋转，可以设计美丽的图案，你能举出一些例子吗？



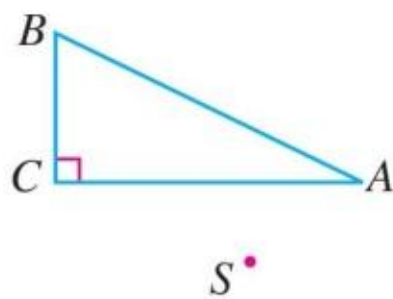
复习题 28

复习巩固

1. 如图所示的图案是由什么基本图形经怎样的旋转得到的？

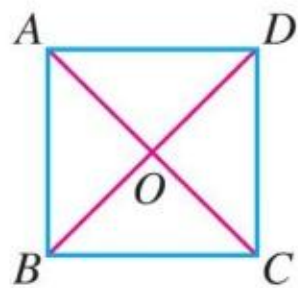


(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，把 $\text{Rt}\triangle ABC$ 以点 S 为中心顺时针旋转 30° ，画出旋转后的图形.
3. 如图，点 O 是正方形 $ABCD$ 的中心.
 - (1) 分别指出图中成中心对称的三角形；
 - (2) 图中哪些三角形可以由其他三角形旋转得到？指出其旋转角.



(第 3 题)

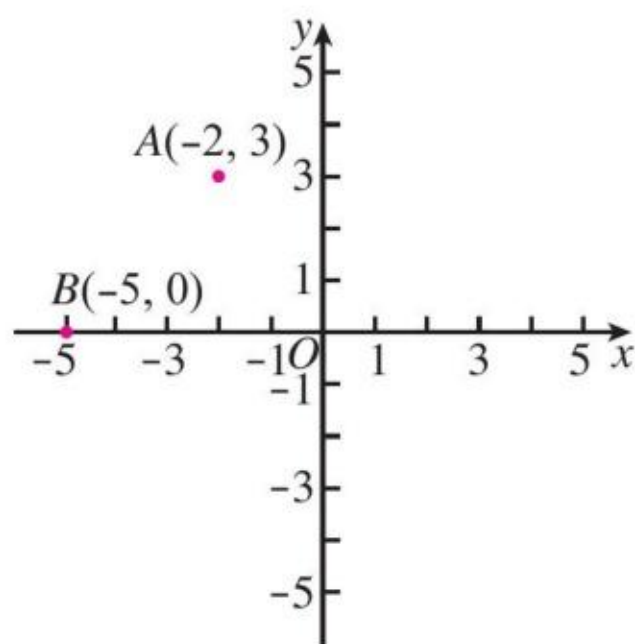


(第 4 题)

4. 在美术字中，有些汉字或字母是中心对称图形. 图中的汉字或字母是中心对称图形吗？如果是，标出它们的对称中心.

5. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 A 的坐标为 $(-2, 3)$, 点 B 的坐标为 $(-5, 0)$.

- (1) 写出点 A, B 关于原点的对称点 A', B' 的坐标;
(2) 画出四边形 $ABA'B'$, 求出其面积.



(第 5 题)

综合运用

6. 下列图形中, 哪个图形既是轴对称图形, 又是中心对称图形?

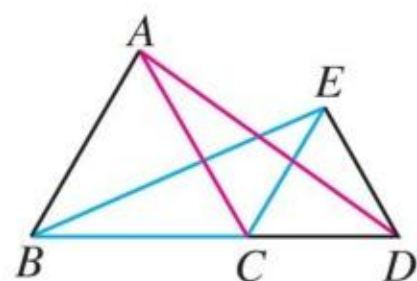


(第 6 题)

7. 已知线段 AB , 用平移、轴对称或旋转完成以下要求:

- (1) 画出一个以这条线段为一边的正方形;
(2) 画出一个以这条线段为一边的等边三角形;
(3) 画出一个以这条线段为一边, 一个内角是 30° 的菱形.

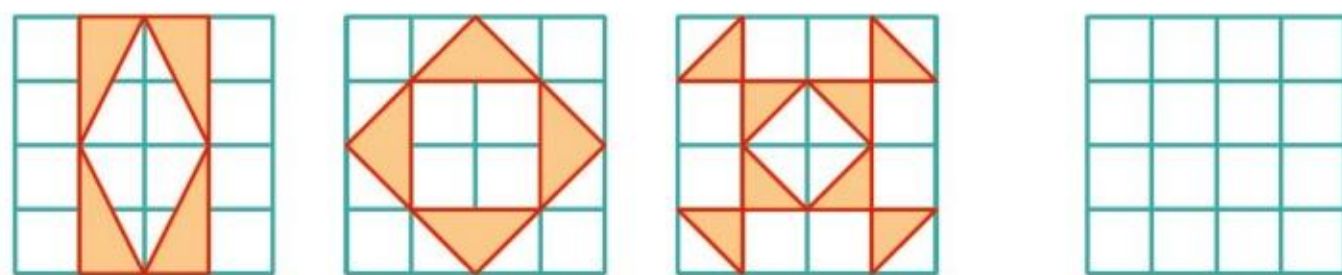
8. 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle ECD$ 都是等边三角形, 点 B, C, D 在同一条直线上, $\triangle EBC$ 可以看作 $\triangle DAC$ 经过平移、轴对称或旋转得到的.



(第 8 题)

- (1) 说明得到 $\triangle EBC$ 的过程;
(2) 若 $\angle ABE = 36^\circ$, 求 $\angle DAC$ 和 $\angle ADE$ 的度数.

9. 观察图 (1) 中各图的阴影部分构成的图案, 这些图案具有怎样的对称性? 它们的面积有什么共同特征? 在图 (2) 中设计图案, 使它也具备上述特征.



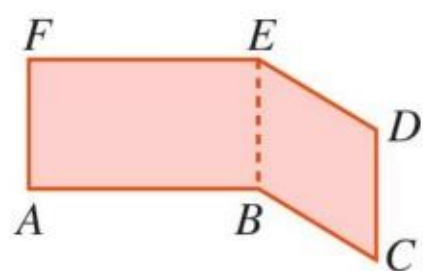
(1)

(2)

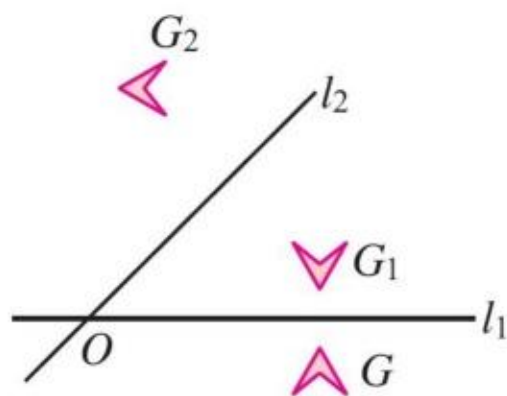
(第 9 题)

拓广探索

10. 如图, 有一张纸片, 若连接 EB , 则纸片被分为矩形 $FABE$ 和菱形 $EBCD$. 你能画一条直线把这张纸片分成面积相等的两部分吗? 画一画, 并说明理由.



(第 10 题)



(第 11 题)

11. 如图, 直线 l_1 , l_2 相交于点 O , 图形 G_1 与图形 G 关于直线 l_1 对称, 图形 G_2 与图形 G_1 关于直线 l_2 对称. 图形 G_2 可以由图形 G 旋转得到吗? 如果能, 指出旋转中心和旋转角.

第二十九章 圆

圆是一种常见的几何图形，圆形物体在生活中随处可见. 圆也是一种美丽的图形，具有多种对称性. 十五的满月、圆圆的月饼象征着圆满、团圆、和谐. 古希腊数学家毕达哥拉斯认为：“一切立体图形中最美的是球，一切平面图形中最美的是圆.”

本章我们将在前面学习的基础上，进一步认识圆，从确定一个圆的基本要素——圆心和半径出发，借助圆的对称性，通过直观想象、操作确认和逻辑推理等方法，探索与圆有关的线段、角的位置关系和数量关系，得到圆的有关性质，并应用它们解决一些问题.



29.1 圆的有关概念

在小学，我们已经初步认识了圆. 本节我们将进一步学习圆的有关概念，探究点与圆的位置关系，这是进一步学习圆的有关性质的基础.

29.1.1 圆的有关概念

圆形物体在生活中很常见，许多物体都给我们以圆的形象（图 29.1-1）.



图 29.1-1

如图 29.1-2，观察画圆的过程，你能从点的运动的角度描述圆是怎样形成的吗？

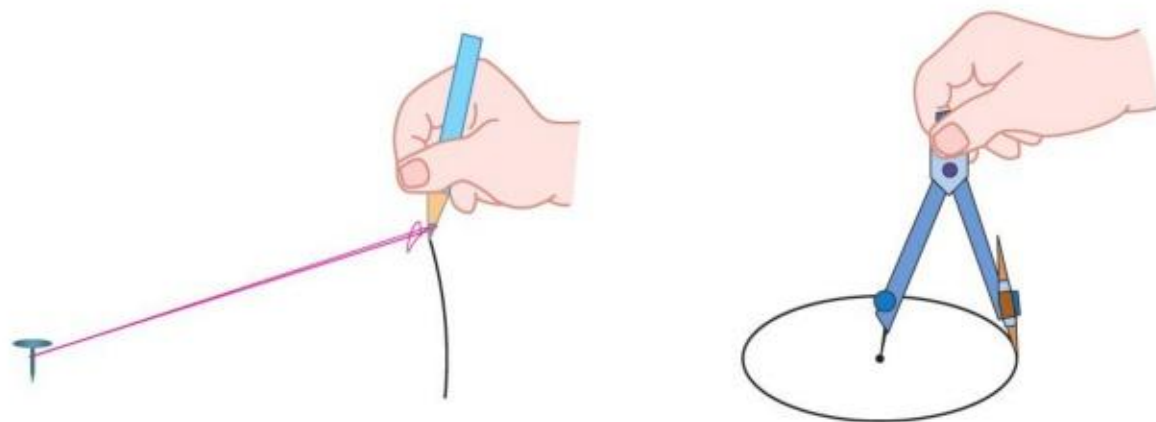


图 29.1-2

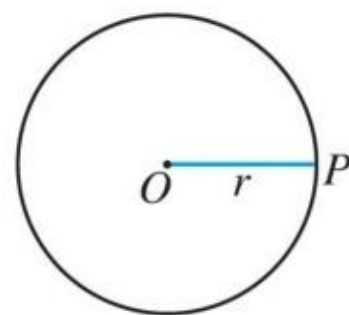


图 29.1-3

如图 29.1-3，在一个平面内，线段 OP 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 P 所形成的图形叫作**圆**（circle），其固定的端点 O 叫作**圆心**，线段

OP 叫作**半径**. 以点 O 为圆心的圆, 记作 $\odot O$, 读作“圆 O ”.

从图 29.1-2 画圆的过程可以看出:

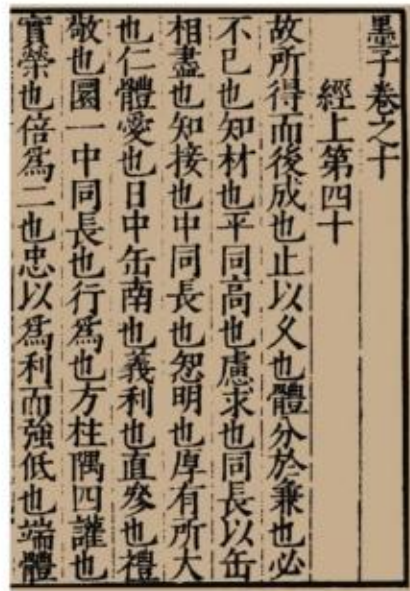
- (1) 圆上各点到定点 (圆心 O) 的距离都等于定长 (半径 r);
- (2) 到定点的距离等于定长的点都在同一个圆上.

因此, 圆心为 O , 半径为 r 的圆可以看成平面内所有到定点 O 的距离等于定长 r 的点的集合.



溯源

众多记载表明, 我们的祖先很早就能从具体事物中抽象出纯粹的形的几何概念, 并会用规和矩这些工具绘制它们. 如战国时的《墨子》中记载着“圆, 一中同长也”, 即圆上各点到圆心的距离都相等; 还记载着“圆, 规写交也”, 即用圆规画图, 使其两端相交便形成一个圆.



《墨子》书影

观察图 29.1-2 画圆的过程, 还可以发现, 平面被圆分成三部分. 相应地, 平面内的点与圆有三种位置关系: 点在圆外, 点在圆上, 点在圆内 (图 29.1-4).

类似于用点到圆心的距离刻画点在圆上, 可以用点到圆心的距离刻画点在圆外、点在圆内. 设 $\odot O$ 的半径为 r , 任意一点 P 到圆心的距离 $OP = d$, 则有

点 P 在圆外 $\Leftrightarrow d > r$;

点 P 在圆上 $\Leftrightarrow d = r$;

点 P 在圆内 $\Leftrightarrow d < r$.

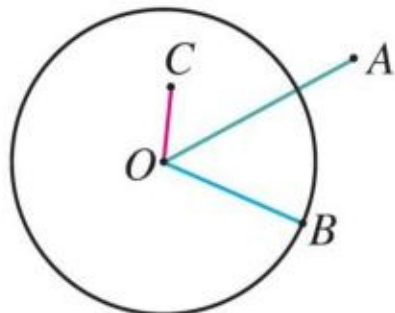


图 29.1-4

符号“ $\Leftrightarrow$ ”读作“等价于”, 它表示从符号“ $\Leftrightarrow$ ”的左端可以推出右端, 从右端也可以推出左端.

例 如图 29.1-5, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O . 求证: A, B, C, D 四个点在以点 O 为圆心的同一个圆上.

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形, 对角线 AC , BD 相交于点 O ,

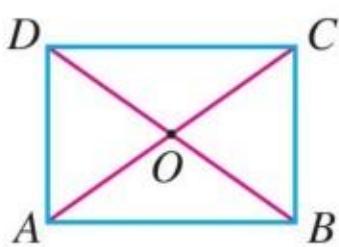


图 29.1-5

$$\therefore OA=OC=\frac{1}{2}AC, OB=OD=\frac{1}{2}BD, AC=BD.$$

$$\therefore OA=OC=OB=OD.$$

$\therefore A, B, C, D$ 四个点在以点 O 为圆心, OA 为半径的圆上 (图 29.1-6).

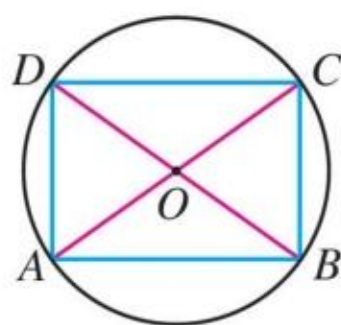


图 29.1-6

连接圆上任意两点的线段叫作**弦**, 经过圆心的弦叫作**直径**, 直径长是半径长的 2 倍. 如图 29.1-7, AB, AC 是弦, AB 是直径.

圆上任意两点间的部分叫作**圆弧**, 简称**弧**. 以 A, B 为端点的弧记作 $\widehat{AB}$, 读作“圆弧 AB ”或“弧 AB ”. 圆的任意一条直径的两个端点把圆分成两条弧, 每一条弧都叫作**半圆**. 大于半圆的弧叫作**优弧**, 小于半圆的弧叫作**劣弧**. 在图 29.1-7 中, $\widehat{ABC}$ (用三个字母表示) 是优弧, $\widehat{AC}$ 是劣弧.

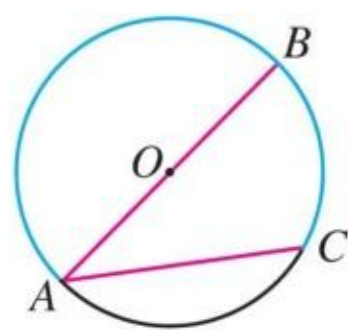


图 29.1-7

能够重合的两个圆叫作**等圆**. 容易看出: 同圆或等圆的半径相等; 反过来, 半径相等的两个圆是等圆. 在同圆或等圆中, 能够互相重合的弧叫作**等弧**.

练习

1. 如何在操场上画一个半径是 5 m 的圆? 说出你的方案及理由.

2. 你见过树木的年轮吗? 从树木的年轮, 可以知道树木的年龄. 把树干的横截面看成圆形, 如果一棵 20 年树龄的树的树干直径是 23 cm, 这棵树的半径平均每年增加多少?



3. $\odot O$ 的半径为 10, 根据下列点 P 到圆心 O 的距离, 判断点 P 和 $\odot O$ 的位置关系:

(1) 8; (2) 10; (3) 12.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$. 求证: A, B, C 三点在同一个圆上.

(第 2 题)

29.1.2 过三点的圆

我们知道“两点确定一条直线”, 那么几个点可以确定一个圆呢?

探究

- (1) 经过一个点 A 能不能作圆？如果能，这样的圆能作出多少个？
- (2) 经过两个点 A, B 能不能作圆？如果能，所作圆的圆心的位置有什么特点？
- (3) 经过不在同一条直线上的三个点 A, B, C 能不能作圆？如果能，如何确定所作圆的圆心？

作圆的关键是确定圆心的位置和半径的大小. 对于经过已知点作圆的问题, 当圆心确定后, 半径也就随之确定, 因此作圆的问题又转化为确定圆心的问题.

经过一个点 A 作圆, 只要以点 A 以外任意一点为圆心, 以这一点与点 A 的距离为半径就可以作出, 这样的圆有无数个 (图 29.1-8(1)).

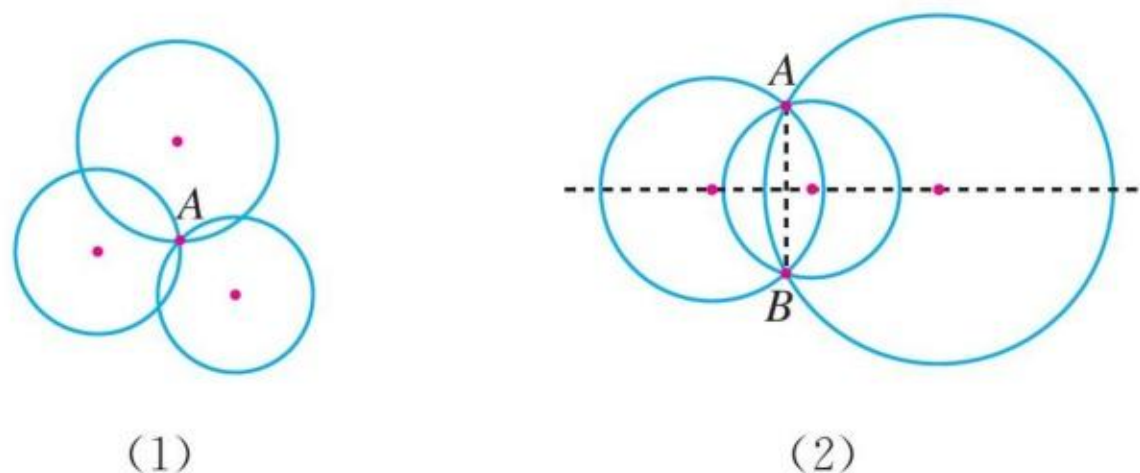


图 29.1-8

经过两个点 A, B 作圆, 由于所作圆的圆心到 A, B 两点的距离相等, 所以圆心在线段 AB 的垂直平分线上, 这样的圆也可以作出无数个 (图 29.1-8(2)).

经过不在同一条直线上的三个点 A, B, C 作圆, 因为所作的圆要经过 A, B, C 三点, 其圆心应满足到这三个点的距离都相等, 所以所作圆的圆心既要在线段 AB 的垂直平分线上, 又要在线段 BC 的垂直平分线上, 显然所作圆的圆心就是这两条垂直平分线的交点.

可以用直尺和圆规作出经过 A, B, C 三点的圆. 如图 29.1-9, 分别作线段 AB, BC 的垂直平分线 l_1, l_2 , 设 l_1, l_2 相交于点 O , 则 $OA = OB = OC$. 以点 O 为圆心, OA 为半径, 作出 $\odot O$. $\odot O$ 就是经过 A, B, C 三点的圆.

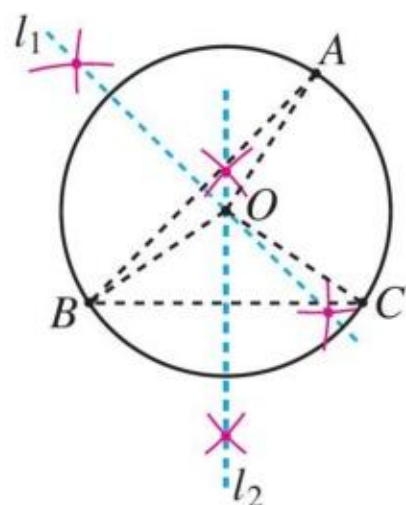


图 29.1-9

由作法可知, 线段 AB, BC 的垂直平分线有且只有

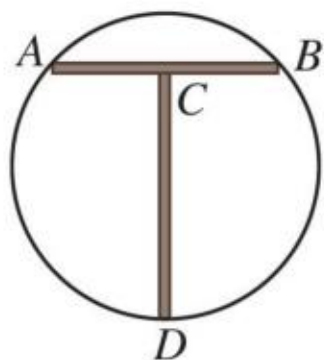
一个交点，所以 $\odot O$ 的圆心是确定的，进而其半径也是确定的. 因此，经过 A, B, C 三点可以作一个并且只可以作一个圆. 这就得到：

不在同一条直线上的三个点确定一个圆.

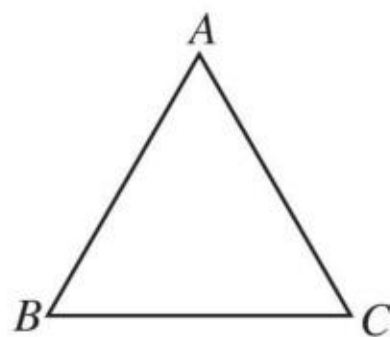
由图 29.1-9 可以看出，经过三角形的三个顶点可以作一个圆，这个圆叫作**三角形的外接圆**，外接圆的圆心是三角形三条边的垂直平分线的交点，叫作这个**三角形的外心**，这个三角形叫作**圆的内接三角形**.

练习

- 如图， CD 所在的直线垂直平分线段 AB ，怎样用这样的工具找到圆形工件的圆心？



(第 1 题)



(第 2 题)

- 如图， $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，作出它的外接圆，并求外接圆的半径长.

思考

我们知道，经过不在同一条直线上的三个点，可以作一个圆. 那么，经过同一条直线上的三个点，可以作一个圆吗？

如图 29.1-10，假设经过同一条直线 l 上的 A, B, C 三点可以作一个圆. 设这个圆的圆心为 P ，那么点 P 既在线段 AB 的垂直平分线 l_1 上，又在线段 BC 的垂直平分线 l_2 上，即点 P 为 l_1 与 l_2 的交点. 而 $l_1 \perp l$ ， $l_2 \perp l$ ，这与以前学过的“过一点有且只有一条直线与已知直线垂直”矛盾. 所以，经过同一条直线上的三个点不能作圆.

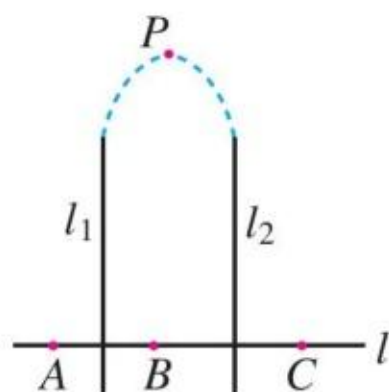


图 29.1-10

上面证明“经过同一条直线上的三个点不能作圆”的方法与我们以前学过的证明不同，它不是直接去证明

命题的结论，而是先提出与结论相反的假设（即假设经过同一条直线上的三个点可以作一个圆），再推导出和定义、基本事实、定理或题设等相矛盾的结果，然后由矛盾断定所作假设不正确，从而得到原命题成立. 这种方法叫作**反证法**.

在某些情形下，反证法是很有效的证明方法. 例如，对于平行线的性质“两直线平行，同位角相等”^{*}，由“两直线平行”直接推导“同位角相等”比较困难，可以采用反证法.

如图 29.1-11，我们要证明：如果 $AB \parallel CD$ ，那么 $\angle 1 = \angle 2$. 假设 $\angle 1 \neq \angle 2$ ，过点 O 作直线 $A'B'$ ，使 $\angle EOB' = \angle 2$. 根据“同位角相等，两直线平行”，可得 $A'B' \parallel CD$. 这样，过点 O 就有两条直线 AB ， $A'B'$ 都平行于 CD ，这与基本事实“过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行”矛盾. 这说明假设 $\angle 1 \neq \angle 2$ 不正确，从而 $\angle 1 = \angle 2$.

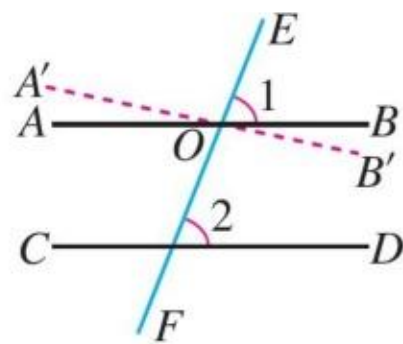


图 29.1-11

练习

1. 用反证法说明：400 人中至少有两个人的生日相同.
2. 用反证法说明：一个三角形中不能有两个角是直角.

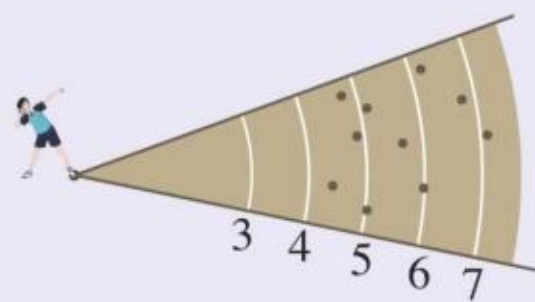
习题 29.1

复习巩固

1. 已知点 A, B 在 $\odot O_1$ 上，点 C, D 在 $\odot O_2$ 上，判断下列说法是否正确：
 - (1) 若 $AB = CD$ ，则 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 是等圆；
 - (2) 若 $O_1A = O_2C$ ，则 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 是等圆；
 - (3) 若 $AB = CD$ ，则 $\widehat{AB}$ 与 $\widehat{CD}$ 是等弧；
 - (4) 若 $O_1B = O_2D$ ，则 $\widehat{AB}$ 与 $\widehat{CD}$ 是等弧.

^{*} 此平行线性质定理的证明为选学内容.

2. 体育课上, 李明和王芳的铅球成绩分别是 6.2 m 和 5.1 m, 他们投出的铅球分别落在图中哪个区域内?



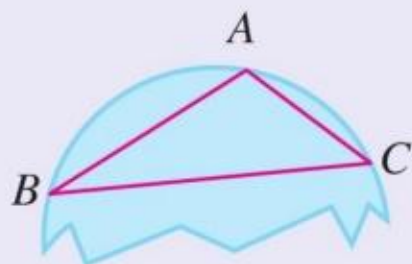
3. 画出由所有到已知点 O 的距离大于或等于 2 cm, 并且小于或等于 3 cm 的点组成的图形.

(第 2 题)

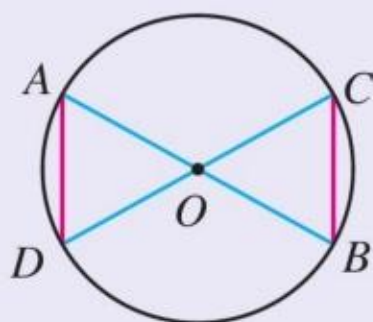
4. 求证: 直径是圆中最长的弦.

综合运用

5. 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , 点 E , F , G , H 分别是 OA , OB , OC , OD 的中点. 求证: E , F , G , H 四个点在以点 O 为圆心的同一个圆上.
6. 张华不小心把家里的一块圆形玻璃镜打碎了, 为了定制一块同样大小的玻璃镜, 需要确定原玻璃镜的半径. 工人师傅在如图所示的玻璃镜残片的边缘描出了点 A , B , C , 给出 $\triangle ABC$, 你能找到这块圆形玻璃镜的半径吗? 作图说明.



(第 6 题)

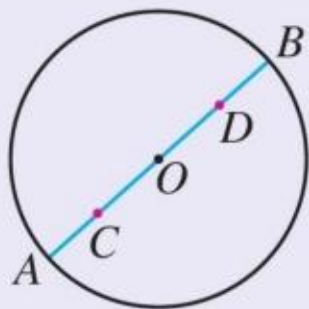


(第 7 题)

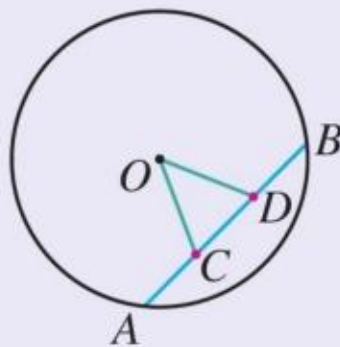
7. 如图, 在 $\odot O$ 中, AB , CD 为直径. 求证 $AD \parallel BC$.
8. 用反证法说明: 在同一平面内, 一条直线与两条平行线中的一条相交, 必定与另一条也相交.

拓广探索

9. 在 $\odot O$ 中, 点 C , D 在弦 AB 上, 且 $AC = BD$.
- (1) 如图 (1), 弦 AB 经过圆心 O , 求证 $OC = OD$;
- (2) 如图 (2), 弦 AB 不经过圆心 O , OC 与 OD 是否仍相等? 说明理由.



(1)



(2)

(第 9 题)

探究与发现

等宽曲线

路上行驶的各种车辆，其车轮都是圆形的。那么，为什么车轮要做成圆形的呢？你知道其中的数学道理吗？

用硬纸板剪一个圆，让它沿直尺在桌面上滚动（图1）。可以发现，圆心与桌面的距离始终是不变的，这个距离等于圆的半径。因此，把车轮做成圆形，当车轮在平坦的地面上滚动时，车轮中心与地面的距离始终保持不变，坐车的人才会感到非常平稳。

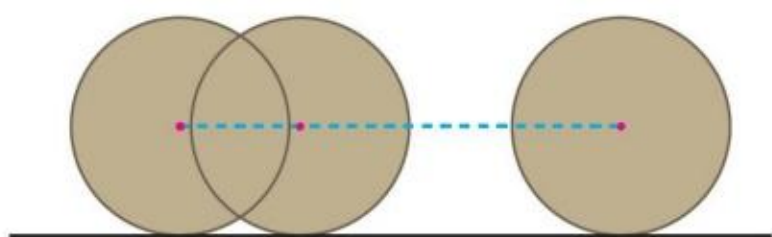


图 1

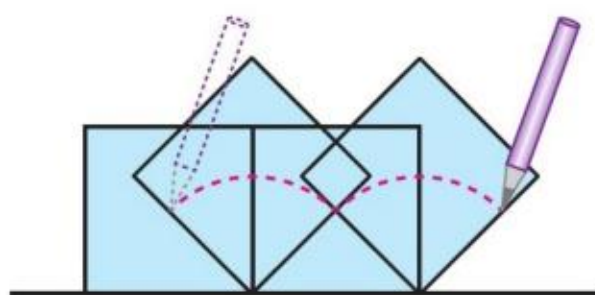


图 2

如果车轮是正方形的，情况会怎样呢？剪一个正方形纸板，让它沿直尺在桌面上滚动，用笔“跟踪”其中心的运动轨迹，你得到了什么（图2）？

实际生活中移动重物时，可以如图3那样，把重物放在圆木棍上，借助木棍的滚动“帮助”重物前进，既省力又平稳。这是因为无论圆怎样滚动，圆的任何一条直径总是相等的，即圆在任意方向都有相同的宽度，它是一条等宽曲线。

如果有条件，你也可以利用信息技术工具模拟一下。

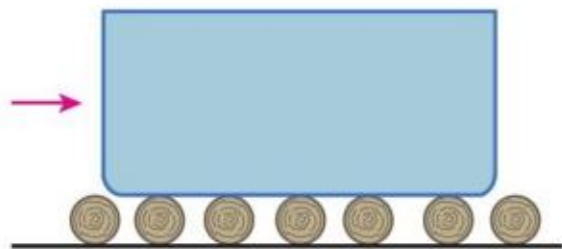


图 3

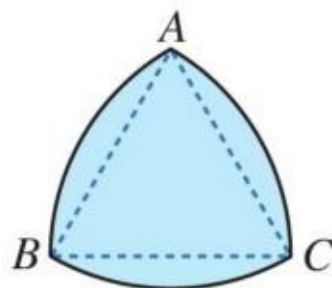


图 4

等宽曲线在任何方向上的直径（或称宽度）都是相等的。同一宽度的等宽曲线，周长相等，其中面积最大的是圆，面积最小的是莱洛三角形（图4）。

分别以等边三角形的三个顶点为圆心，以边长为半径画弧，得到的封闭

图形就是莱洛三角形. 如图 5, 以莱洛三角形为横截面的滚子, 也能使所载重物水平地移动, 而不会上下颠簸.

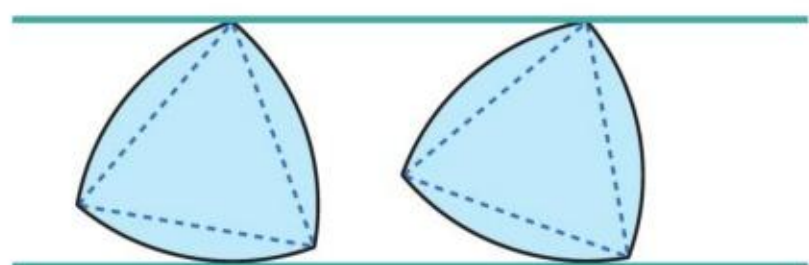


图 5



图 6

等宽曲线有着广泛的应用. 例如, 锅、杯、壶、缸、桶等许多加盖的盛具, 都是圆口圆盖的形状; 再如, 汽车的发动机里也利用了等宽曲线 (图 6 是某汽车的转子发动机截面图).

29.2 圆的有关性质

对于圆，与之相关的几何对象有线段、弧和角. 研究圆的有关性质，就是研究这些几何对象之间的位置关系和数量关系.

29.2.1 垂直于弦的直径

我们先来研究与圆有关的线段. 与圆有关的线段主要是直径和弦，而提到直径，你能想到圆的哪种对称性？

探究

剪一个圆形纸片，沿着它的任意一条直径对折，你发现了什么？重复做几次，由此你能得到圆具有怎样的对称性？能证明你的结论吗？

通过探究可以发现，圆是轴对称图形，任意一条直径所在的直线都是圆的对称轴. 下面来证明这个结论.

要证明圆是轴对称图形，只需证明圆上任意一点关于直径所在直线（对称轴）的对称点也在圆上.

如图 29.2-1，设 AB 是 $\odot O$ 的任意一条直径，如果 M 为 $\odot O$ 上点 A, B 以外的任意一点， M' 是点 M 关于直线 AB 的对称点，那么直线 AB 是线段 MM' 的垂直平分线. 因为圆心 O 在 AB 上，所以 $OM' = OM$ ，因此点 M' 在 $\odot O$ 上. 如果点 M 与点 A 或点 B 重合，那么结论显然也成立.

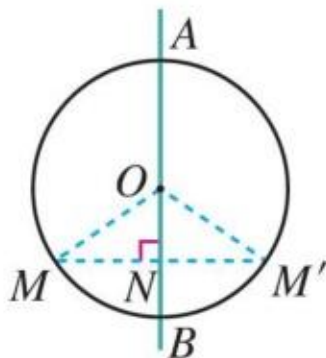


图 29.2-1

这样，我们就证明了：

圆是轴对称图形，任何一条直径所在直线都是圆的对称轴.

利用圆的轴对称性可以知道，如果 $\odot O$ 的直径 AB 垂直于弦 MM' ，垂足为 N ，那么 M 和 M' 是关于直径 AB 的对称点. 把圆沿着直径 AB 对折时，点 M 与点 M' 重合， MN 与 $M'N$ 重合， $\widehat{MA}$ ， $\widehat{MB}$ 分别与 $\widehat{M'A}$ ， $\widehat{M'B}$ 重合.

因此， $MN = M'N$ ， $\widehat{MA} = \widehat{M'A}$ ， $\widehat{MB} = \widehat{M'B}$.

因此，直径 AB 平分弦 MM' ，并且平分 $\widehat{MAM'}$ ， $\widehat{MM'}$.

这样，就得到垂径定理：

垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧.

进一步，还可以得到推论：

平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.

例 1 赵州桥是我国隋代建造的石拱桥，距今已有 1 400 余年的历史，是我国古代人民勤劳与智慧的结晶. 它的主桥拱是圆弧形，跨度（弧所对的弦的长）为 37 m，拱高（弧的中点到弦的距离）为 7.23 m，求赵州桥主桥拱的半径长（结果保留小数点后一位）.



分析：解决问题的关键是根据赵州桥的实物图抽象出几何图形，将求赵州桥主桥拱的半径问题转化为求圆弧所在圆的半径问题.

解：如图 29.2-2， $\widehat{AB}$ 表示主桥拱，设 $\widehat{AB}$ 所在圆的圆心为 O ，半径长为 R m.

经过圆心 O 作弦 AB 的垂线 OC ， D 为垂足， OC 与 $\widehat{AB}$ 相交于点 C ，连接 OA . 根据垂径定理， D 是 AB 的中点， C 是 $\widehat{AB}$ 的中点， CD 就是拱高.

由题设可知

$$AB=37, CD=7.23,$$

所以

$$AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 37=18.5,$$

$$OD=OC-CD=R-7.23.$$

在 $\text{Rt}\triangle OAD$ 中，由勾股定理，得

$$OA^2=AD^2+OD^2,$$

即

$$R^2=18.5^2+(R-7.23)^2.$$

解得

$$R\approx 27.3.$$

因此，赵州桥主桥拱的半径长约为 27.3 m.

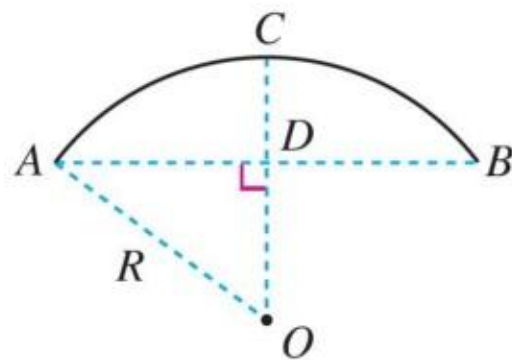
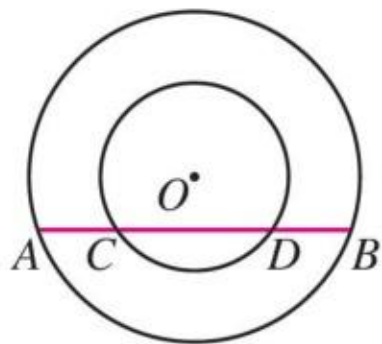


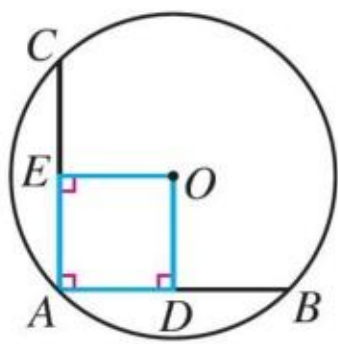
图 29.2-2

练习

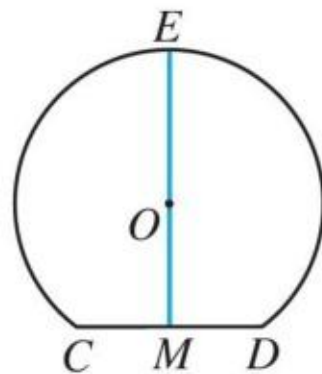
1. 如图，两个圆都以点 O 为圆心，大圆的弦 AB 交小圆于 C, D 两点. 求证 $AC=BD$.



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

2. 如图，在 $\odot O$ 中， AB, AC 为互相垂直且相等的两条弦， $OD \perp AB$ ， $OE \perp AC$ ，垂足分别为 D, E . 求证：四边形 $ADOE$ 是正方形.
3. 如图是一个隧道的横截面，它的形状是以点 O 为圆心的圆的一部分. 如果 M 是 $\odot O$ 中弦 CD 的中点， EM 经过圆心 O 交 $\odot O$ 于点 E ，且 $CD=4\text{ m}$ ， $EM=6\text{ m}$. 求 $\odot O$ 的半径长.

29.2.2 圆心角

再来研究与圆有关的角，先考虑角的顶点在圆心这种特殊位置的情形. 我们把顶点在圆心的角叫作**圆心角** (central angle).

在圆的有关性质的研究中，其对称性发挥着重要作用. 前面，我们利用圆的轴对称性，得到了垂径定理. 为研究圆心角，我们再看看圆的其他对称性.

探究

剪一个圆形纸片，把它绕圆心旋转 180° ，所得的图形与原图形重合吗？由此你能得到什么结论？把圆绕圆心旋转任意一个角度呢？

实际上，圆是中心对称图形，圆心就是它的对称中心. 不仅如此，把圆绕圆心旋转任意一个角度，所得的图形都与原图形重合，即圆是旋转对称图形. 利用这个性质，可以得到圆心角及其所对的弧、弦之间的关系.

思考

如图 29.2-3, 在 $\odot O$ 中, 当圆心角 $\angle AOB = \angle A'OB'$ 时, 它们所对的弧 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{A'B'}$ 有什么关系? 弦 AB 和 $A'B'$ 呢? 为什么?

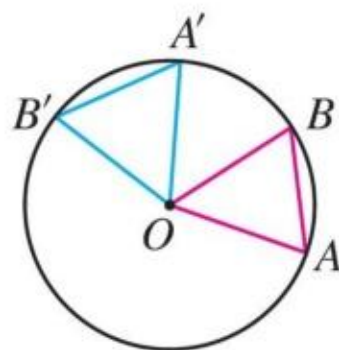


图 29.2-3

我们把 $\angle AOB$ 连同 $\widehat{AB}$ 绕圆心 O 旋转, 使射线 OA 与 OA' 重合.

$\because \angle AOB = \angle A'OB',$

$\therefore$ 射线 OB 与 OB' 重合.

又 $OA = OA', OB = OB',$

$\therefore$ 点 A 与 A' 重合, 点 B 与 B' 重合.

因此, $\widehat{AB}$ 与 $\widehat{A'B'}$ 重合, AB 与 $A'B'$ 重合. 于是 $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}, AB = A'B'.$

这样, 就得到下面的定理:

在同圆或等圆中, 相等的圆心角所对的弧相等, 所对的弦也相等.

同样, 还可以得到:

在同圆或等圆中, 如果两条弧相等, 那么它们所对的圆心角相等, 所对的弦相等;

在同圆或等圆中, 如果两条弦相等, 那么它们所对的圆心角相等, 所对的优弧和劣弧分别相等.

例 2 如图 29.2-4, 在 $\odot O$ 中, $\widehat{AB} = \widehat{AC}, \angle ACB = 60^\circ$. 求证: $\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC$.

证明: $\because$ 在 $\odot O$ 中, $\widehat{AB} = \widehat{AC},$

$\therefore AB = AC, \triangle ABC$ 是等腰三角形.

又 $\angle ACB = 60^\circ,$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形, 可得 $AB = BC = AC.$

$\therefore \angle AOB = \angle BOC = \angle AOC.$

在同圆或等圆中, 对于两个圆心角、两条弧、两条弦, 如果有一组量相等, 那么它们所对应的其余各组量有什么关系?

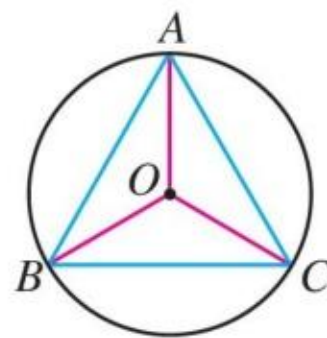


图 29.2-4

练习

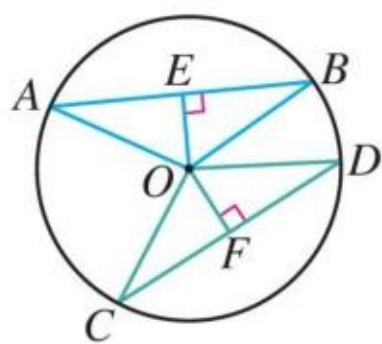
1. 如图, AB, CD 是 $\odot O$ 的两条弦.

(1) 如果 $AB = CD$, 那么 _____, _____.

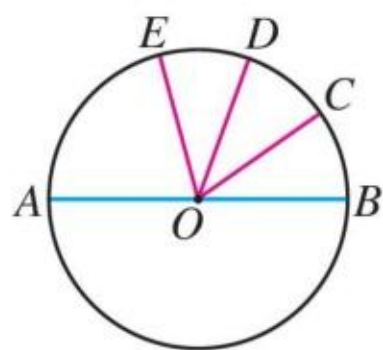
(2) 如果 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$, 那么 _____, _____.

(3) 如果 $\angle AOB = \angle COD$, 那么 _____, _____.

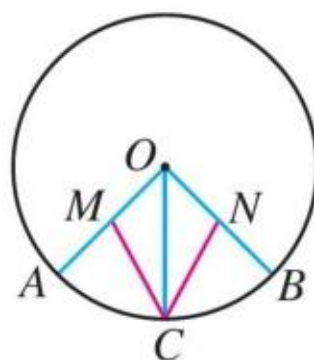
(4) 如果 $AB = CD$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$, 垂足分别为 E, F , OE 与 OF 相等吗? 为什么?



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

2. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, $\widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE}$, $\angle COD = 35^\circ$. 求 $\angle AOE$ 的度数.

3. 如图, OA, OB, OC 是 $\odot O$ 的三条半径, $\widehat{AC} = \widehat{BC}$, M, N 分别是 OA, OB 的中点. 求证 $MC = NC$.

29.2.3 圆周角

对于与圆有关的角, 除了圆心角, 还有一种特殊位置的情形: 角的顶点在圆上, 并且两边都与圆相交. 下面就来研究这种角.

如图 29.2-5, 在 $\odot O$ 中, $\angle A$ 的顶点在圆上, 点 B, C 是 $\angle A$ 的两边与圆的交点. 像这样, 顶点在圆上并且两边都与圆相交的角叫作 **圆周角** (angle in a circular segment).

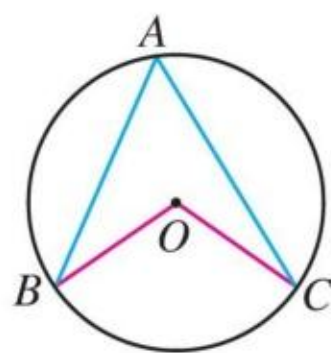


图 29.2-5

如图 29.2-5, 连接 BO, CO , 得到圆心角 $\angle BOC$. 可以发现, 圆周角 $\angle BAC$ 与圆心角 $\angle BOC$ 对着同一条弧 $\widehat{BC}$, 它们之间是否存在一定的关系?

探究

分别测量图 29.2-5 中 $\widehat{BC}$ 所对的圆周角 $\angle BAC$ 和圆心角 $\angle BOC$ 的度数, 它们之间有什么关系?

利用信息技术工具, 改变 $\widehat{BC}$, 测量 $\angle BAC$, $\angle BOC$ 的大小, 上述关系是否仍然成立?

由此你能发现什么结论? 能证明你发现的结论吗?

可以发现, 一条弧所对圆周角的度数等于这条弧所对圆心角的度数的一半.

如图 29.2-6, 为了证明上面发现的结论, 在 $\odot O$ 上任取一个圆周角 $\angle BAC$, 可以发现, 圆心 O 与圆周角 $\angle BAC$ 的位置关系有三种:

- (1) 圆心在圆周角的一条边上;
- (2) 圆心在圆周角的内部;
- (3) 圆心在圆周角的外部.

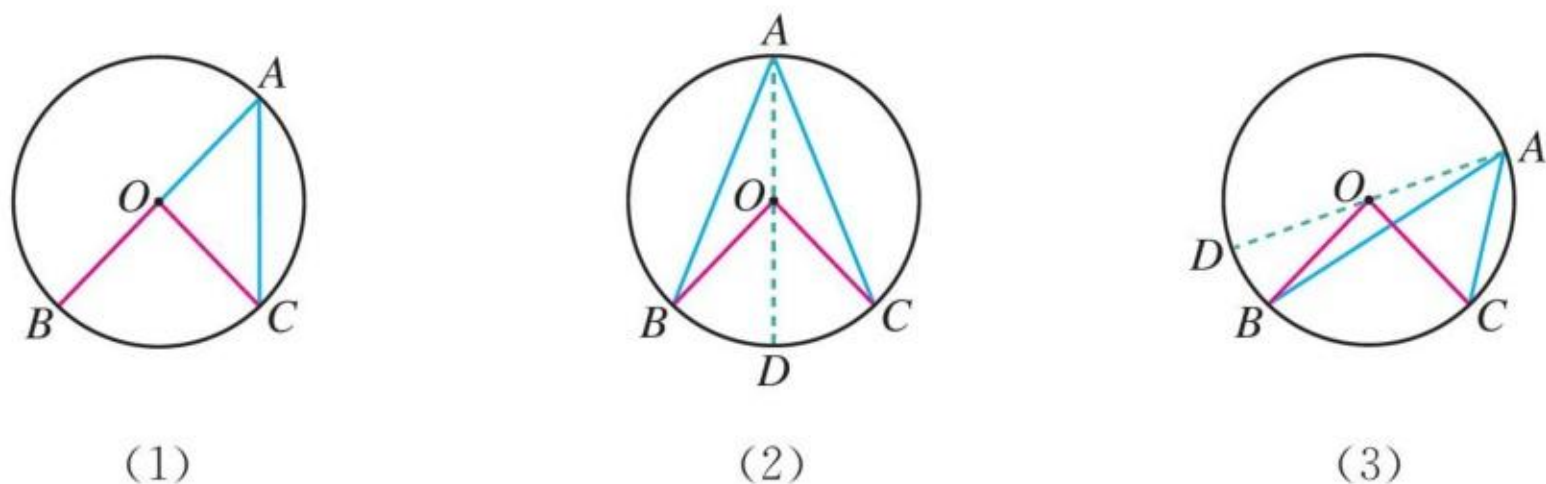


图 29.2-6

先来分析情况(1). 如图 29.2-6(1), 圆心 O 在 $\angle BAC$ 的一条边上.

$$\left. \begin{array}{l} OA = OC \Rightarrow \angle A = \angle C \\ \angle BOC = \angle A + \angle C \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A = \frac{1}{2} \angle BOC.$$

符号 “ $\Rightarrow$ ” 读作 “推出”, “ $A \Rightarrow B$ ” 表示由条件 A 推出结论 B .

对于情况(2)(3), 可以通过添加辅助线 (图 29.2-6(2)(3)), 将它们转化为情况(1), 从而进行证明 (请你完成证明).

这样, 就得到圆周角定理:

一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

进一步, 可以得到下面的推论 (请你完成证明):

同弧或等弧所对的圆周角相等.

半圆 (或直径) 所对的圆周角是直角, 90° 的圆周角所对的弦是直径 (图 29.2-7).

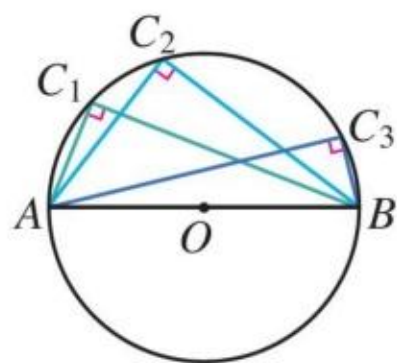


图 29.2-7

例 3 如图 29.2-8, $\odot O$ 的直径 AB 的长为 10, 弦 AC 的长为 6, $\angle ACB$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D , 求 BC , AD , BD 的长.

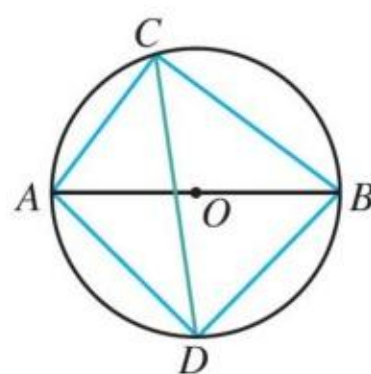


图 29.2-8

分析: 解决与圆有关的问题, 关键在于分析圆心角、圆周角、直径和弦之间的关系. 由 AB 是直径, 可知圆周角 $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$; 由圆周角 $\angle ACD = \angle BCD$, 可知它们相应的圆心角相等, 进而得到弦 $AD = BD$.

解: 如图 29.2-9, 连接 OD .

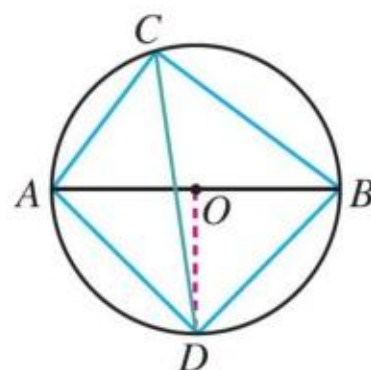
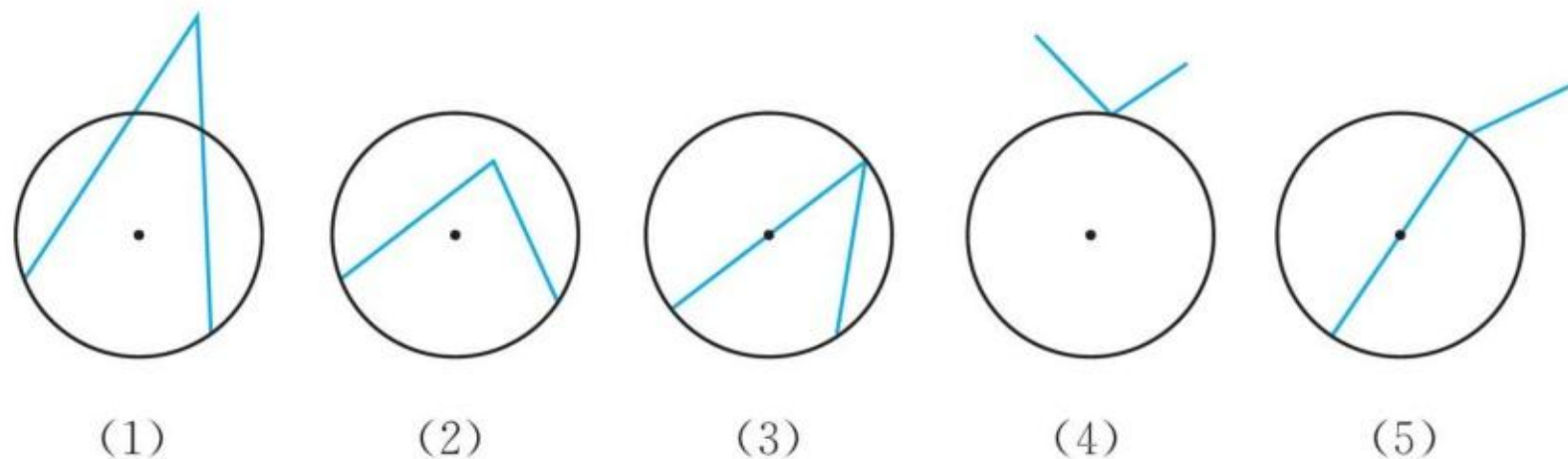


图 29.2-9

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,
 $\therefore \angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$.
 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = 10$, $AC = 6$,
 $\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 8$.
 $\because CD$ 平分 $\angle ACB$,
 $\therefore \angle ACD = \angle BCD$.
 $\because$ 在 $\odot O$ 中, $\angle AOD = 2\angle ACD$, $\angle BOD = 2\angle BCD$,
 $\therefore \angle AOD = \angle BOD$.
 $\therefore AD = BD$.
 又 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AD^2 + BD^2 = AB^2$,
 $\therefore AD = BD = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = 5\sqrt{2}$.

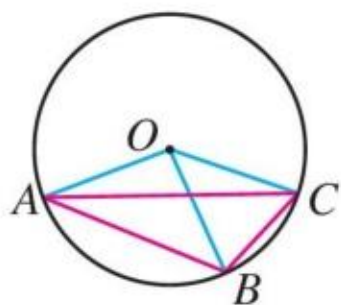
练习

1. 判断下列图形中的角是不是圆周角, 并说明理由.



(第 1 题)

2. 如图, OA, OB, OC 都是 $\odot O$ 的半径, $\angle AOB = 2\angle BOC$, 求证 $\angle ACB = 2\angle BAC$.



(第2题)



(第3题)

3. 如图, 你能用三角尺确定一张圆形纸片的圆心吗? 有几种方法? 与同学交流一下.

在上一节中, 我们学习了圆的内接三角形和三角形的外接圆, 类似地, 如果一个多边形的所有顶点都在同一个圆上, 这个多边形叫作**圆的内接多边形**, 这个圆叫作这个**多边形的外接圆**. 如图 29.2-10, 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, $\odot O$ 是四边形 $ABCD$ 的外接圆.

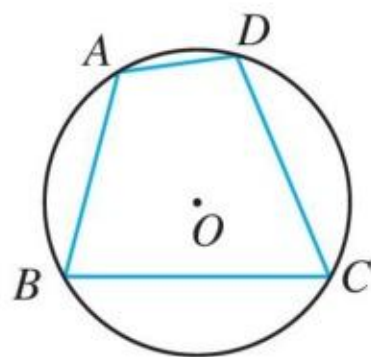


图 29.2-10

因为圆内接四边形的每个角都是圆周角, 所以可以利用圆周角定理研究圆内接四边形的角之间的关系.

思考

圆内接四边形的四个角除了具有一般四边形的内角和为 360° 的性质, 是否还有其他性质?

如图 29.2-11, 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形. 连接 OB, OD .

$\because \angle A$ 所对的弧为 $\widehat{BCD}$, $\angle C$ 所对的弧为 $\widehat{BD}$,
又 $\widehat{BCD}$ 和 $\widehat{BD}$ 所对的圆心角的和是周角,

$$\therefore \angle A + \angle C = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

同理 $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

这样, 利用圆周角定理, 得到圆内接四边形的一个性质:

圆内接四边形的对角互补.

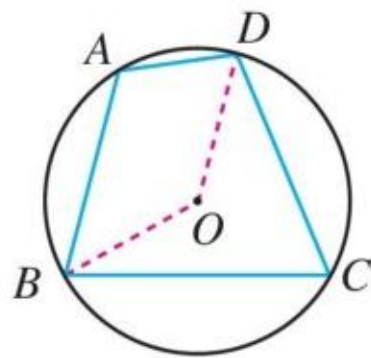


图 29.2-11

例 4 如图 29.2-12, 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形. 若 $\angle BOD = 100^\circ$, 求 $\angle A$ 和 $\angle C$ 的度数.

解: $\because$ 在 $\odot O$ 中, $\angle A$ 与 $\angle BOD$ 所对的弧都是 $\widehat{BD}$,

$$\therefore \angle A = \frac{1}{2} \angle BOD = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ.$$

又 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形,

$$\therefore \angle C + \angle A = 180^\circ.$$

$$\therefore \angle C = 130^\circ.$$

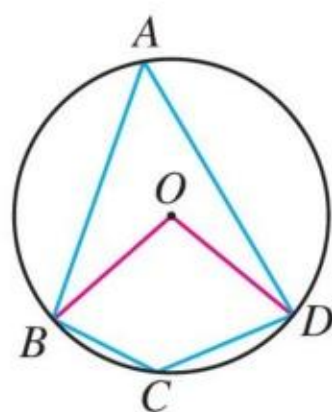
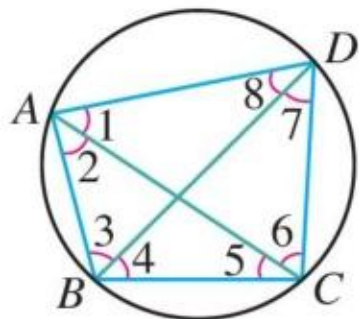


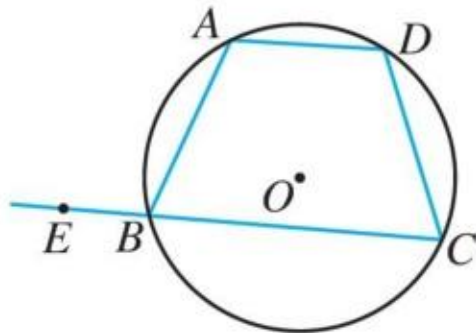
图 29.2-12

练习

1. 如图, 圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 把它的四个内角分成八个角, 这八个角中哪些相等? 为什么?



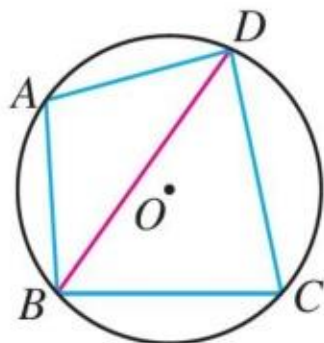
(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图, 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, E 为 CB 延长线上一点. 若 $\angle D = 110^\circ$, 求 $\angle ABE$ 的度数.

3. 如图, 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, 且 $AB = AD$. 若 $\angle C = 78^\circ$, 求 $\angle ABD$ 的度数.

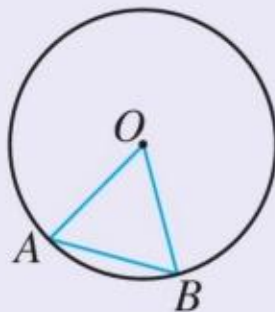


(第 3 题)

习题 29.2

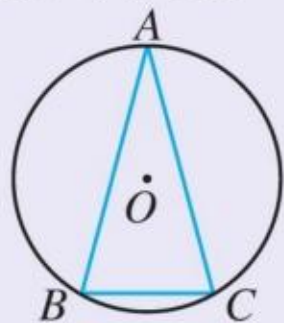
复习巩固

1. 如图, 在半径为 1 的 $\odot O$ 中, 弦 AB 的长为 1.
- (1) 求 $\angle AOB$ 的度数;
 - (2) 求点 O 到 AB 的距离.

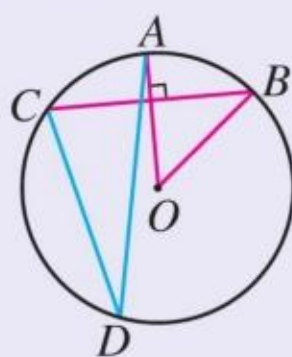


(第 1 题)

2. 如图, 在 $\odot O$ 中, $\widehat{AB} = \widehat{AC}$, $\angle C = 75^\circ$. 求 $\angle A$ 的度数.



(第2题)



(第3题)

3. 如图, 在 $\odot O$ 中, $OA \perp BC$, $\angle AOB = 50^\circ$. 求 $\angle ADC$ 的度数.

4. 如图, 用直角曲尺检查半圆形的工件, 哪个工件是合格的? 为什么?



(第4题)



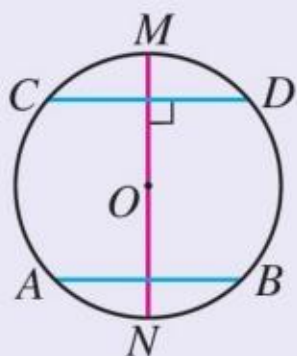
5. 求证: 圆内接平行四边形是矩形.

6. $\odot O$ 的半径为13, AB , CD 是 $\odot O$ 的两条弦, $AB \parallel CD$, $AB = 24$, $CD = 10$.

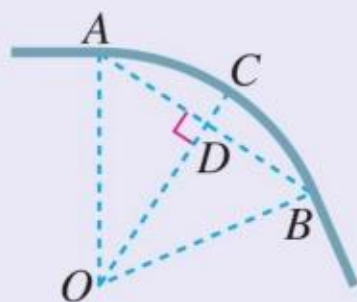
求 AB 和 CD 之间的距离.

综合运用

7. 如图, AB , CD 是 $\odot O$ 的两条平行弦, MN 是 AB 的垂直平分线. 求证: MN 垂直平分 CD .



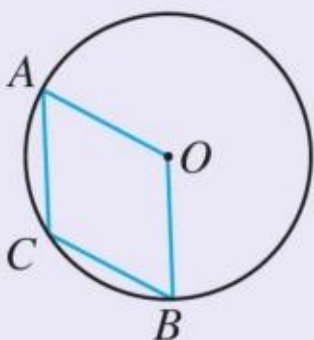
(第7题)



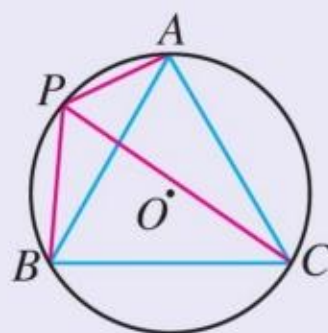
(第8题)

8. 如图, 一条公路的转弯处是一段圆弧($\widehat{AB}$), 点 O 是这段弧所在圆的圆心, $AB = 300$ m, C 是 $\widehat{AB}$ 上一点, $OC \perp AB$, 垂足为 D , $CD = 45$ m, 求这段弯路所在圆的半径长.

9. 如图, A , B 是 $\odot O$ 上的两点, $\angle AOB = 120^\circ$, C 是 $\widehat{AB}$ 的中点. 求证: 四边形 $OACB$ 是菱形.



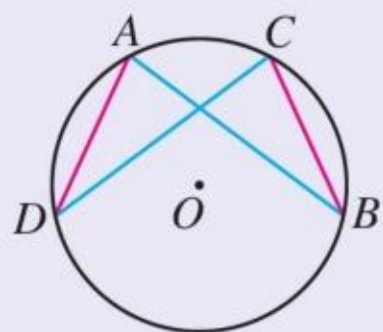
(第9题)



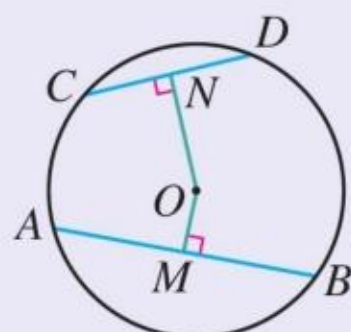
(第10题)

10. 如图, A, P, B, C 是 $\odot O$ 上的四个点, $\angle APC = \angle CPB = 60^\circ$. 判断 $\triangle ABC$ 的形状, 并证明你的结论.

11. 如图, AD, BC 是 $\odot O$ 上的两条弦, $AD = BC$. 判断 AB 和 CD 的长是否相等, 并证明你的结论.



(第 11 题)

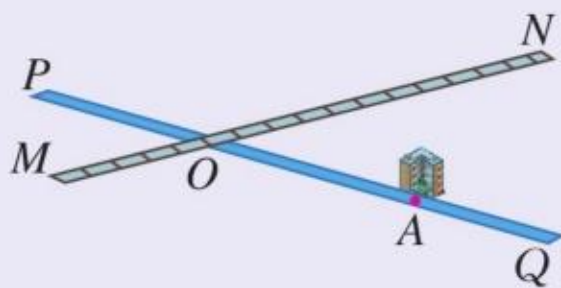


(第 12 题)

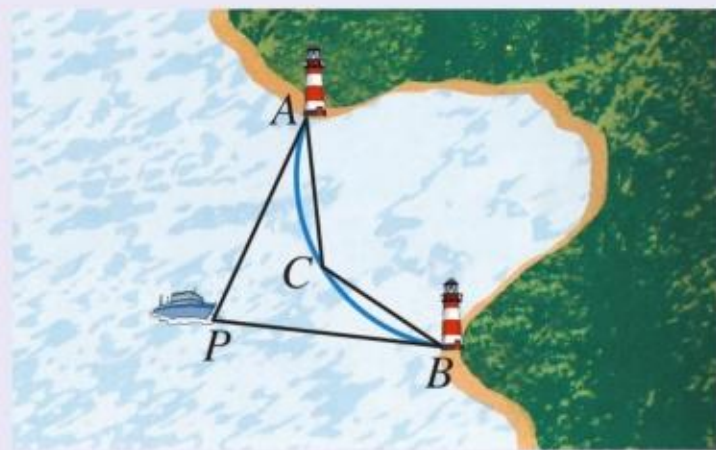
12. 如图, AB, CD 是 $\odot O$ 上的两条弦, $OM \perp AB$, $ON \perp CD$, 垂足分别为 M, N . 如果 $AB > CD$, OM 和 ON 的大小有什么关系? 为什么?

拓广探索

13. 如图, 铁路 MN 和公路 PQ 在点 O 处交会, $\angle QON = 30^\circ$, 在点 A 处有一栋居民楼, $AO = 200$ m. 如果一列 400 m 长的火车行驶时, 周围 200 m 以内会受到噪声的影响, 那么火车在铁路 MN 上沿 ON 方向行驶时, 居民楼是否会受到噪声的影响? 如果火车行驶的速度为 72 km/h, 居民楼受噪声影响的时间为多少秒 (结果保留小数点后一位)?



(第 13 题)



(第 14 题)

14. 如图, 一个海港在 $\widehat{AB}$ 范围内是浅滩. 为了使深水船只不进入浅滩, 需要测量船所在的位置与两个灯塔的视角 $\angle APB$, 并把它与已知的危险角 $\angle ACB$ ($\widehat{AB}$ 上任意一点 C 与两个灯塔所成的角) 相比较, 航行中保持 $\angle APB < \angle ACB$. 你知道这样做的道理吗?

29.3 弧长和扇形面积

在小学，我们学过圆的周长和面积的计算. 本节将结合圆的性质，学习弧长和扇形面积的计算.

思考

我们知道，弧是圆的一部分，弧长就是圆周长的一部分. 想一想，如何计算圆周长？圆的周长可以看作多少度的圆心角所对的弧长？由此出发， 1° 的圆心角所对的弧长是多少？ n° 的圆心角呢？

在半径为 R 的圆中，因为 360° 的圆心角所对的弧长就是圆周长 $C=2\pi R$ ，所以 1° 的圆心角所对的弧长是 $\frac{2\pi R}{360}$ ，即 $\frac{\pi R}{180}$. 于是， n° 的圆心角所对的弧长为

$$l = \frac{n\pi R}{180}.$$

例 1 制造弯形管道时，经常要先按中心线计算“展直长度”，再下料. 计算图 29.3-1 所示管道的展直长度 L （结果取整数）.

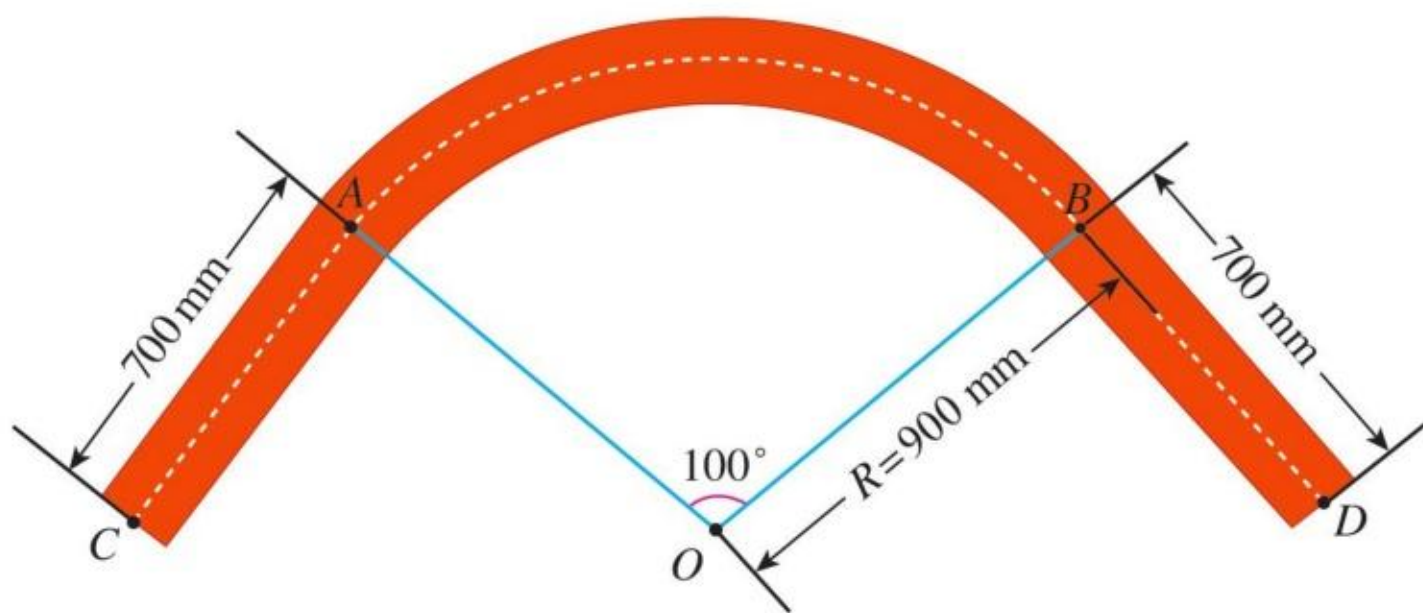


图 29.3-1

解：由弧长公式，得 $\widehat{AB}$ 的长

$$l = \frac{100 \times 900 \times \pi}{180} = 500\pi \approx 1\,570.$$

因此所要求的展直长度

$$L \approx 2 \times 700 + 1\,570 = 2\,970 \text{ (mm)}.$$

在本书中，如无特殊说明， π 取 3.14.

如图 29.3-2, 由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧围成的图形叫作**扇形**. 可以发现, 扇形的面积除了与圆的半径有关, 还与组成扇形的圆心角的大小有关. 在同圆或等圆中, 圆心角越大, 扇形面积也就越大. 那么, 怎样计算圆半径为 R , 圆心角为 n° 的扇形面积呢?

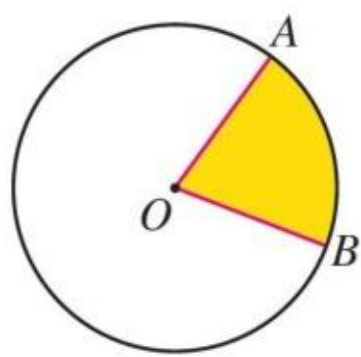


图 29.3-2

思考

由扇形的定义可知, 扇形面积就是圆面积的一部分. 想一想, 如何计算圆的面积? 圆面积可以看作圆心角为多少度的扇形的面积? 圆心角为 1° 的扇形面积是多少? 圆心角为 n° 的扇形呢?

在半径为 R 的圆中, 因为圆心角为 360° 的扇形的面积就是圆面积 $S = \pi R^2$, 所以圆心角为 1° 的扇形面积是 $\frac{\pi R^2}{360}$. 于是, 圆心角为 n° 的扇形面积是

$$S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360}.$$

比较扇形面积公式与弧长公式, 可以用弧长表示扇形面积:

$$S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2}lR,$$

其中 l 为扇形的弧长, R 为半径.

例 2 如图 29.3-3, 水平放置的圆柱形排水管的截面半径是 0.6 m, 其中水面高 0.3 m. 求截面上有水部分的面积 (结果保留小数点后两位).

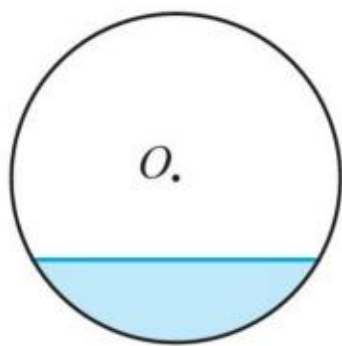


图 29.3-3

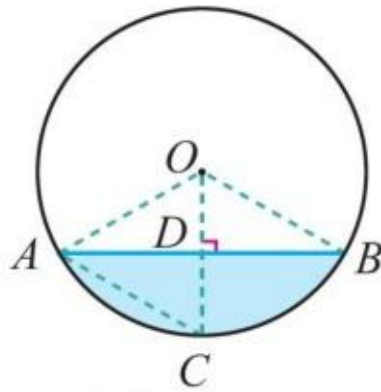


图 29.3-4

解: 如图 29.3-4, 连接 OA , OB , 过点 O 作弦 AB 的垂线, 垂足为 D , 交 $\widehat{AB}$ 于点 C , 连接 AC .

$$\because OD = OC - DC, OC = 0.6, DC = 0.3,$$

$$\therefore OD = 0.3.$$

$$\therefore OD = DC.$$

$$\text{又 } AD \perp OC,$$

$\therefore AD$ 是线段 OC 的垂直平分线.

$\therefore AC=AO=OC$.

从而 $\angle AOD=60^\circ$, $\angle AOB=120^\circ$.

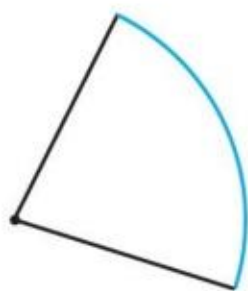
则有水部分的面积

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{扇形}OAB} - S_{\triangle OAB} \\ &= \frac{120\pi}{360} \times 0.6^2 - \frac{1}{2} AB \cdot OD \\ &= 0.12\pi - \frac{1}{2} \times 0.6 \times \sqrt{3} \times 0.3 \\ &\approx 0.22 \text{ (m}^2\text{)}. \end{aligned}$$

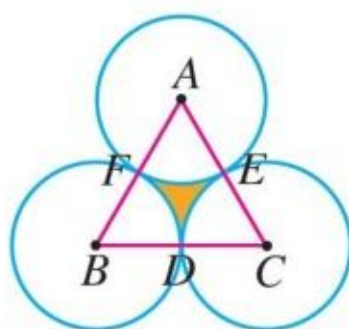
请你自已求出 AB 的长.

练习

1. 弧长相等的两段弧是等弧吗? 并说明理由.
2. 如图, 有一段弯道是圆弧形的, 弯道长是 12 m, 弧所对的圆心角是 81° . 这段圆弧所在圆的半径 R 是多少米 (结果保留小数点后一位)?



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 a 的等边三角形, D, E, F 分别是 BC, CA, AB 的中点, 以 A, B, C 三点为圆心, $\frac{a}{2}$ 为半径作圆. 求图中阴影部分的面积.

我们知道, 圆锥是由一个底面和一个侧面围成的几何体. 如图 29.3-5, 我们把连接圆锥顶点和底面圆周上任意一点的线段叫作**圆锥的母线**.



图 29.3-5

思考

圆锥的侧面展开图是什么图形？如何计算圆锥的侧面积？如何计算圆锥的全面积？

如图 29.3-6，沿一条母线将圆锥的侧面剪开并展平，得到的圆锥的侧面展开图是一个扇形. 设圆锥的母线长为 l ，底面圆的半径为 r ，那么这个扇形的半径为 l ，扇形的弧长为底面圆的周长 $2\pi r$ ，因此圆锥的侧面积为 πrl ，圆锥的全面积为 $\pi r(r+l)$.

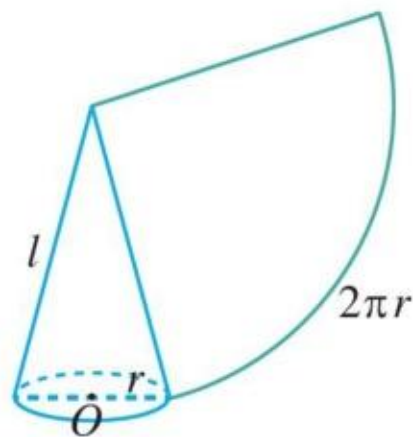


图 29.3-6

例 3 如图 29.3-7，毡房可以近似地看作由圆锥和圆柱组成. 如果想用毛毡搭建 20 个底面积为 12 m^2 ，高为 3.2 m ，外围高 1.8 m 的毡房，至少需要多少平方米毛毡 (π 取 3.142 ，结果取整数)？



图 29.3-7

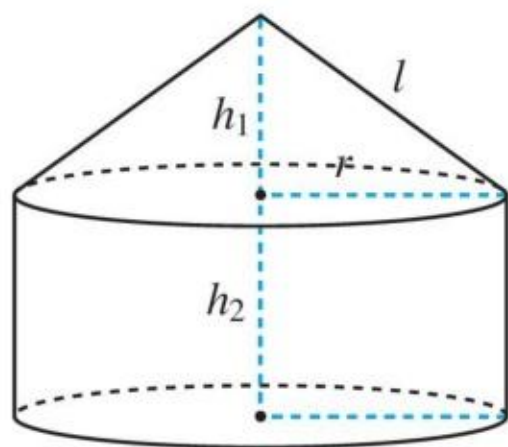


图 29.3-8

解：图 29.3-8 是一个毡房的示意图.

根据题意，下部圆柱的底面积为 12 ，高 $h_2 = 1.8$ ；上部圆锥的高 $h_1 = 3.2 - 1.8 = 1.4$.

圆柱的底面圆的半径

$$r = \sqrt{\frac{12}{\pi}} \approx 1.954,$$

侧面积为

$$2\pi \times 1.954 \times 1.8 \approx 22.10.$$

圆锥的母线长

$$l = \sqrt{1.954^2 + 1.4^2} \approx 2.404,$$

侧面展开扇形的弧长为

$$2\pi \times 1.954 \approx 12.28,$$

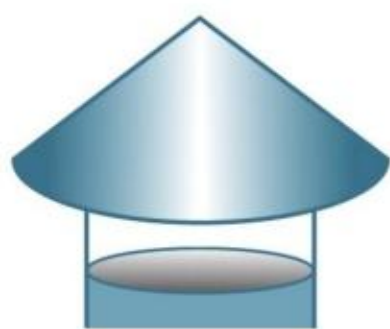
圆锥的侧面积为

$$\frac{1}{2} \times 2.404 \times 12.28 \approx 14.76.$$

因此, 搭建 20 个这样的毡房至少需要毛毡 $20 \times (22.10 + 14.76) \approx 738 \text{ (m}^2\text{)}$.

练习

- 圆锥的底面半径是 6, 母线长 18, 求它的侧面展开图的圆心角.
- 如图, 圆锥形烟囱帽的底面圆的直径是 80 cm, 母线长是 50 cm, 制作 100 个这样的烟囱帽至少需要多少平方米铁皮 (π 取 3.142, 结果保留小数点后一位)?

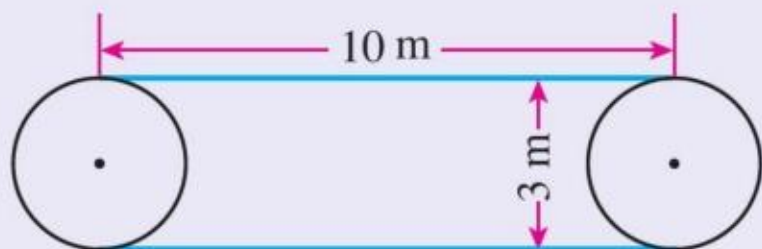


(第 2 题)

习题 29.3

复习巩固

- 填空题.
 - 75° 的圆心角所对的弧长是 2.5π , 则此弧所在圆的半径为_____;
 - 一个扇形的弧长是 20π , 面积是 240π , 则这个扇形的圆心角为_____;
 - 用一个圆心角为 120° , 半径为 4 的扇形作一个圆锥的侧面, 这个圆锥的底面圆的半径为_____.
- 如图, 两个大小一样的传送轮连接着一条传送带. 求这条传送带的长 (结果保留小数点后一位).



(第 2 题)



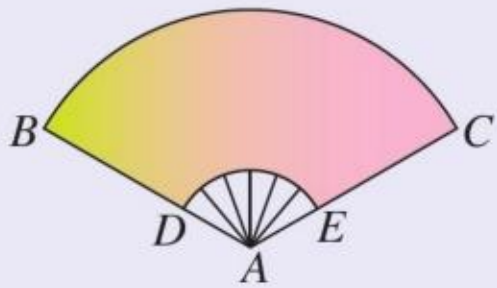
(第 3 题)

- 如图, 正方形的边长为 a , 以各边为直径在正方形内画半圆. 求阴影部分的面积.

4. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=3$, $BC=4$. 把 $\triangle ABC$ 分别沿三边所在直线旋转一周, 求所得三个几何体的全面积.

综合运用

5. 在航海中, 常用海里 (单位: n mile) 作为路程的度量单位. 把地球看作球体, 1 n mile 近似等于赤道所在的圆中 $1'$ 的圆心角所对的弧长. 已知地球半径 (也就是赤道所在圆的半径) 约为 6 370 km, 1 n mile 约等于多少米 (结果取整数)?
6. 如图, 扇形纸扇完全打开后, 外侧两竹条所在直线 AB , AC 之间的夹角为 120° . 若 AB 的长为 30 cm, BD 的长为 20 cm, 求扇面 $BDEC$ 的面积 (结果取整数).



(第 6 题)

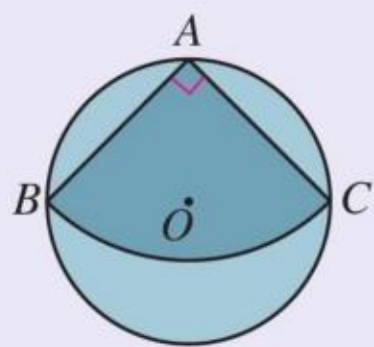


(第 7 题)

7. 如图, 粮仓的顶部是圆锥形, 这个圆锥的底面圆的周长为 32 m, 母线长 7 m. 为了防雨, 需要在它的顶部铺上油毡, 所需油毡的面积至少是多少?

拓广探索

8. 如图, 从一块直径是 1 m 的圆形铁皮上剪下一个圆心角为 90° 的扇形, 求剩余部分的面积. 如果将剪下来的扇形围成一个圆锥, 圆锥的底面圆的半径长是多少 (结果保留小数点后两位)?



(第 8 题)

数学活动

活动1 四等分圆周

有两千多年历史的中国铜镜以“装饰繁缛、制作精美”著称于世，圆形铜镜是它最重要的一种样式。圆形铜镜的背面通常有各种几何的、艺术的花纹，许多花纹的制作都涉及等分圆周的问题，如图1中铜镜背面的花纹制作分别需要八等分、十六等分圆周。



东汉连弧纹铜镜



西汉草叶纹铜镜

图1

如何用尺规八等分、十六等分一个圆周呢？

如图2，任意作 $\odot O$ 的直径 AB ，过点 O 作 AB 的垂线，与 $\odot O$ 相交于 C, D 两点，则点 A, B, C, D 将 $\odot O$ 四等分。你能说明其中的道理吗？

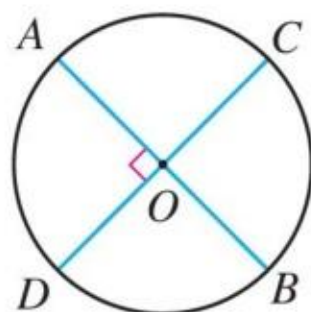


图2

进一步，再逐步等分圆心角，就可以得到所需的八等分、十六等分了。随着后续的学习，你还会学到更多利用尺规等分圆周的方法。

在我国，圆不仅是一种几何图形，还具有许多传统文化中的象征意义，如“天圆地方”的哲学观、“团圆”“和谐”的美好愿望等。观察一下你的周围，你会发现很多圆和圆的美，尝试用圆去创造美吧！

活动2 探究四点共圆的条件

我们知道，过任意一个三角形的三个顶点能作一个圆。那么，过任意一个四边形的四个顶点能作一个圆吗？

图 3 给出了一些四边形，能否过它们的四个顶点作一个圆？试一试！

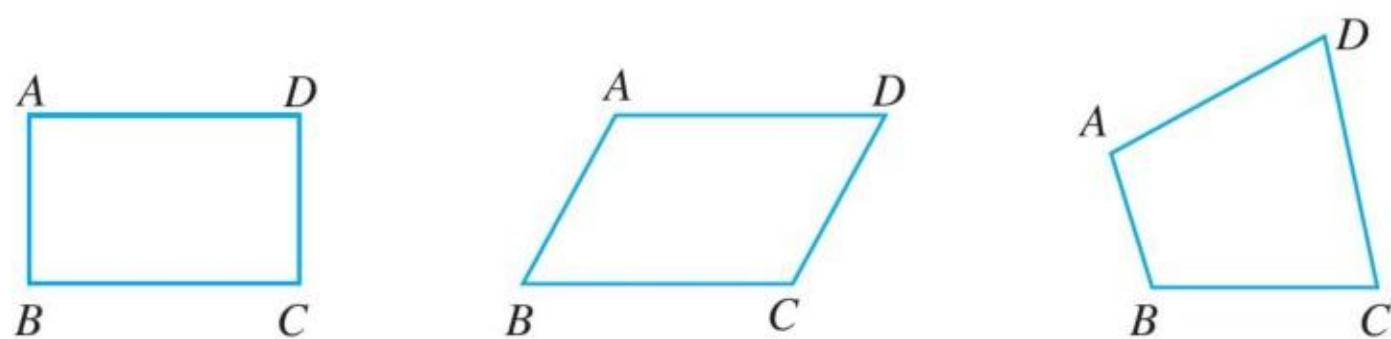


图 3

分别测量上面各四边形的内角，如果过某个四边形的四个顶点能作一个圆，那么其相对的两个内角之间有什么关系？证明你的发现。

如果过某个四边形的四个顶点不能作一个圆，那么其相对的两个内角之间有上面的关系吗？结合图 4 说明其中的道理。（提示：利用圆周角所对弧的大小关系，考虑 $\angle B + \angle D$ 与 180° 之间的关系。）

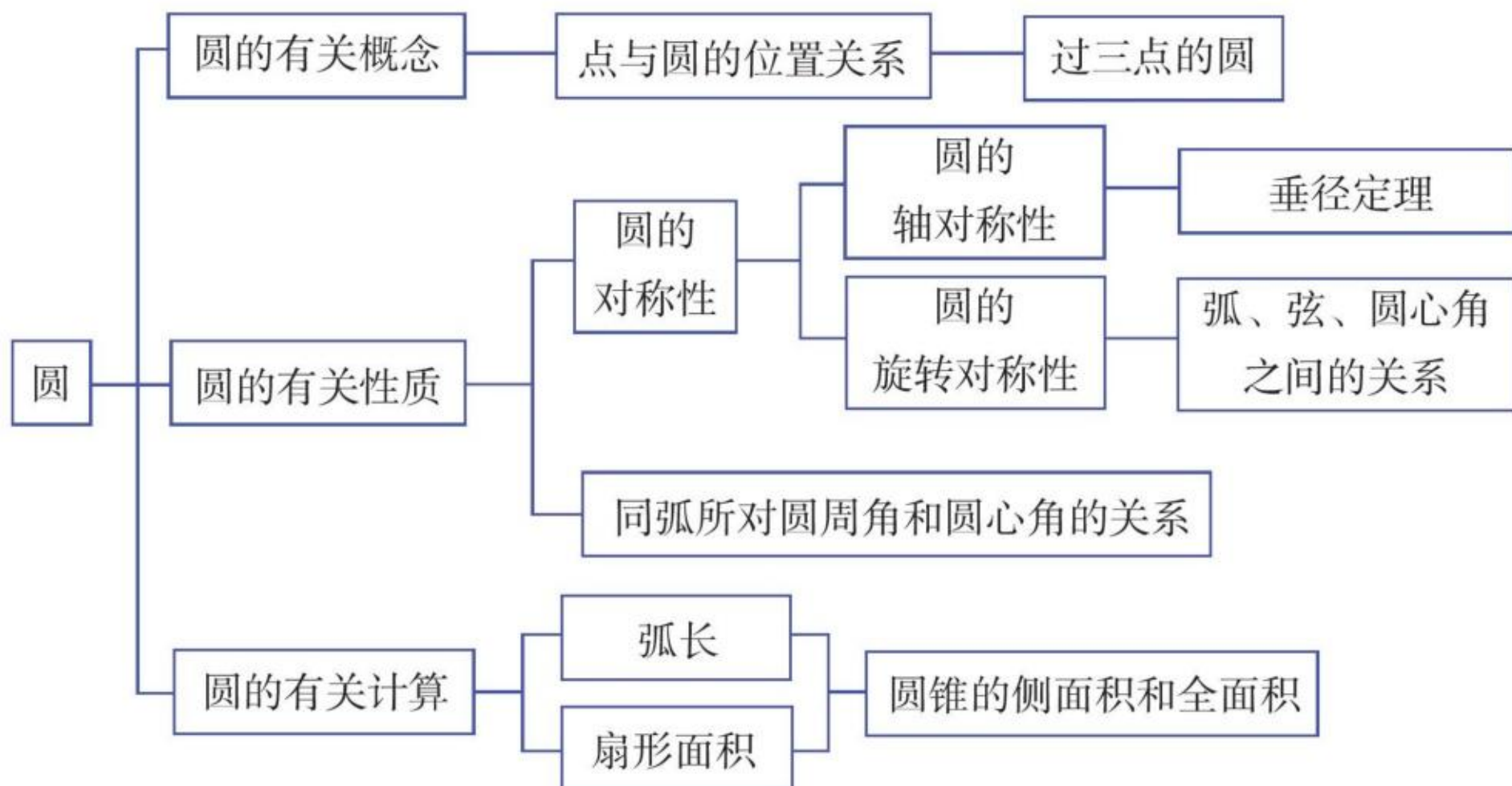


图 4

由上面的探究，归纳出判定过某个四边形的四个顶点能作一个圆的条件。

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章的主要内容是圆的有关概念、性质，以及弧长、扇形面积等的计算. 在研究这些内容的过程中，我们运用数形结合、类比、转化等方法，利用图形直观发现结论，通过逻辑推理证明结论，进一步增强了几何直观，提升了推理能力.

圆是一种特殊的曲线，由圆是所有到定点的距离等于定长的点的集合出发，我们研究了点与圆的位置关系；通过尺规作图明确了不在同一条直线上的三点确定一个圆；给出了三角形的外接圆和圆的内接三角形的概念，并将其推广到了多边形的外接圆和圆的内接多边形.

圆具有轴对称性，它的任何一条直径所在直线都是它的对称轴，同时它也具有旋转对称性，围绕圆心旋转任意角度都和自身重合. 圆的许多性质与圆的对称性有关，研究圆的性质就是借助圆的对称性，探索与圆有关的线段（如直径、弦等）和角（如圆心角、圆周角等）的位置关系和数量关系. 在得出和证明圆的性质的过程中，直线形图形的有关性质和

判定发挥了重要作用.

请你带着下面的问题,复习一下全章的内容吧.

1. 圆的位置及大小由哪些要素确定? 如何从点的集合的角度理解圆的概念?

2. 点与圆有怎样的位置关系? 你能举出这些位置关系的一些实例吗? 你能用哪些方法刻画这些位置关系?

3. 你能用直尺和圆规作出一个三角形的外接圆吗? 圆的内接四边形有什么性质?

4. 垂直于弦的直径有什么性质? 在同圆或等圆中, 两个圆心角以及它们所对的弧、弦有什么关系? 这些关系和圆的对称性有什么联系?

5. 一条弧所对的圆周角和这条弧所对的圆心角有什么关系? 你能总结出发现和证明结论的方法吗?

6. 怎样由圆的周长和面积公式得到弧长公式和扇形面积公式?

7. 研究圆的方法与研究直线形图形的方法有什么共同点? 有什么不同点? 你能举出具体的例子说明吗?



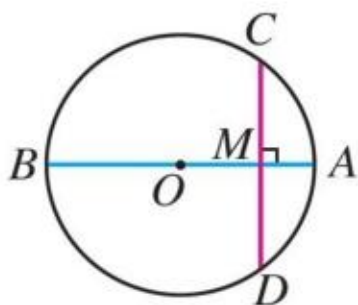
复习题 29

复习巩固

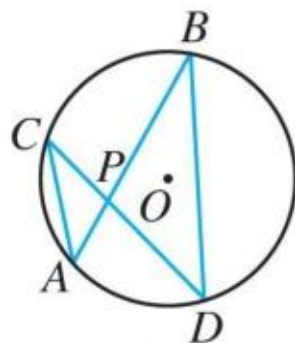
1. 选择题.

(1) 如图, $\odot O$ 的直径 $AB = 10$, CD 是 $\odot O$ 的弦, $AB \perp CD$, 垂足为 M , $OM : OA = 3 : 5$, 则 CD 的长为 ().

(A) $\sqrt{91}$ (B) 8 (C) 6 (D) 4



(1)



(2)

(第 1 题)

(2) 如图, 在 $\odot O$ 中, 弦 AB , CD 相交于点 P , $\angle A=40^\circ$, $\angle APD=75^\circ$, 则 $\angle B=$ ().

- (A) 15° (B) 40° (C) 75° (D) 35°

(3) 一个圆锥的侧面积是底面积的2倍, 则圆锥侧面展开图的圆心角是 ().

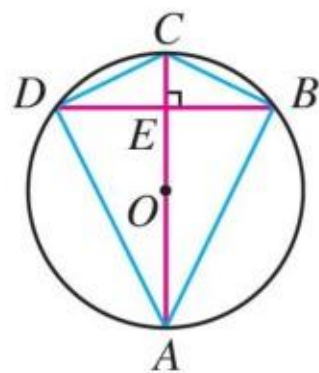
- (A) 120° (B) 180° (C) 240° (D) 300°

2. 已知线段 AB 的长为4 cm, 以3 cm为半径作圆, 使它经过 A , B 两点.

3. 如图, 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, AC 为直径, 且 $AC \perp BD$, 垂足为 E .

(1) 若 $\angle BAD=70^\circ$, 求四边形 $ABCD$ 其余各角的大小;

(2) 若 $AC=10$, $BD=8$, 求 AE , CE 的长.

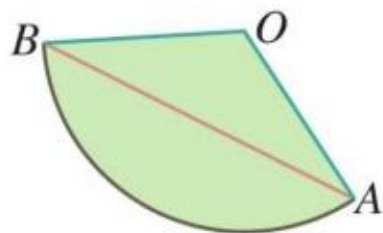


(第3题)

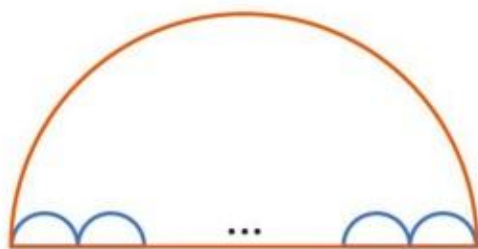
4. 如图, 公园内有一块半径为18 m的扇形草坪, 从 A 地走到 B 地有观赏路(弧 $\widehat{AB}$)和便民路(线段 AB), 且 $\angle AOB=120^\circ$.

(1) 求扇形草坪的面积(结果取整数);

(2) 王芳从 A 地走到 B 地, 走便民路比走观赏路少走多少米(结果保留小数点后一位)?



(第4题)



(第5题)

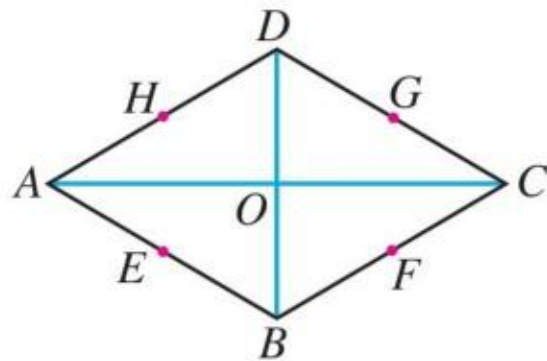
5. 如图, 大半圆中有 n 个小半圆, 大半圆的弧长为 L_1 , n 个小半圆的弧长和为 L_2 , 探索 L_1 和 L_2 的关系, 并证明你的结论.

综合运用

6. 估计图中三段弧的半径的大小关系, 再用尺规检验你的估计是否正确.



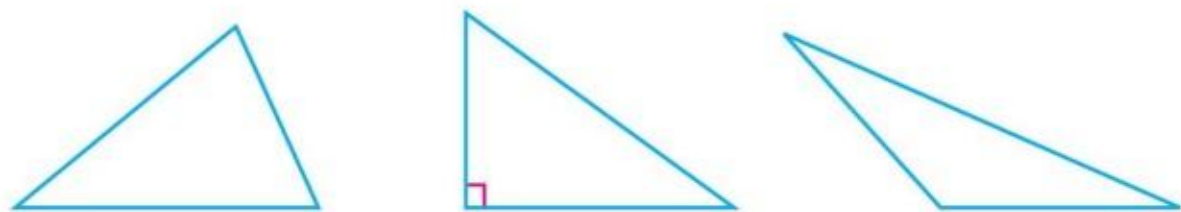
(第6题)



(第7题)

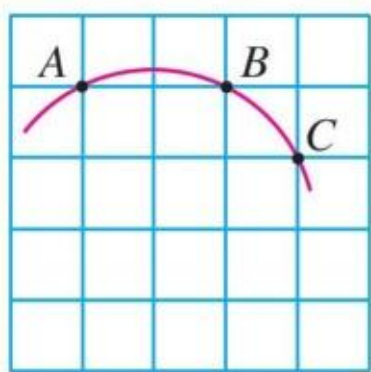
7. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , 四条边 AB , BC , CD , DA 的中点分别为 E , F , G , H , 这四个点共圆吗? 如果共圆, 圆心在哪里?

8. 如图，分别作出锐角三角形、直角三角形和钝角三角形的外接圆，它们的外心的位置有什么特征？

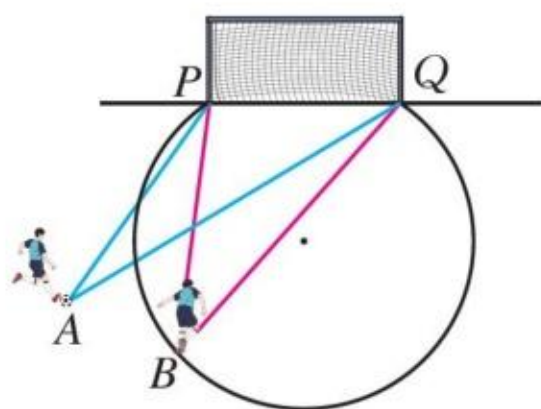


(第 8 题)

9. 如图，网格中的每个小正方形的边长都为 1，一条圆弧经过 A , B , C 三点，求这条圆弧所在圆的半径长.

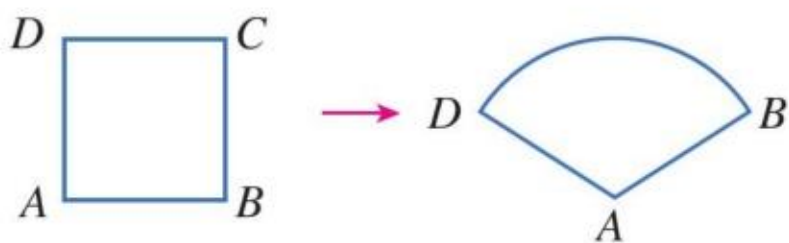


(第 9 题)

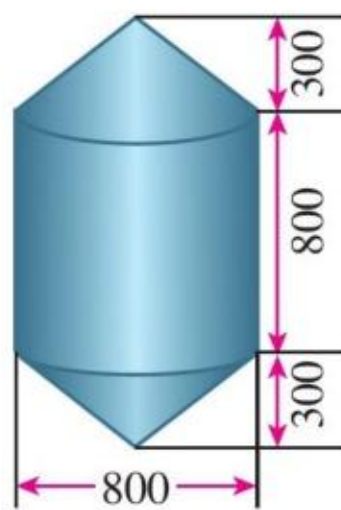


(第 10 题)

10. 如图，在足球比赛中，甲带球奔向对方球门 PQ ，当他带球冲到点 A 时，同伴乙已经冲到点 B . 此时甲是直接射门好，还是将球传给乙，让乙射门好（仅从射门角度大小考虑）？
11. 如图，某兴趣小组的同学将边长为 10 cm 的正方形铁丝框 $ABCD$ 变形为以点 A 为圆心，以 AB , AD 为半径的扇形（忽略铁丝的粗细），所得扇形 ABD 的面积是多少？



(第 11 题)

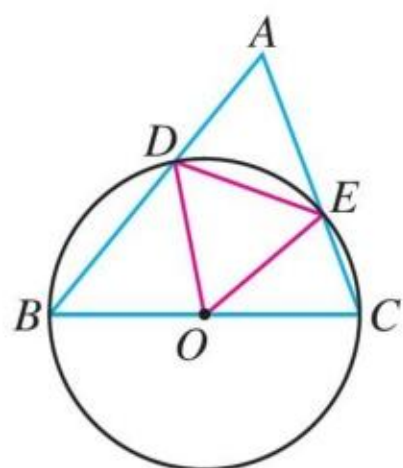


(第 12 题)

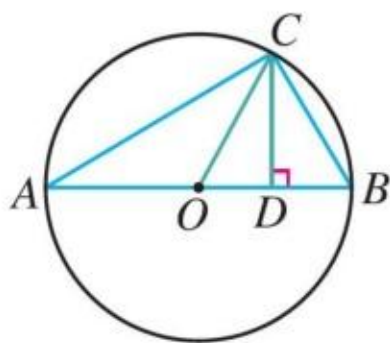
12. 如图，锚标浮筒是打捞作业中用作标记锚或沉船位置的常用工具，它的上下两部分是圆锥，中间是圆柱（单位：mm）. 电镀时，如果每平方米用锌 0.11 kg，电镀 100 个这样的锚标浮筒，需要用锌多少千克（结果保留小数点后一位）？

拓广探索

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, 以 BC 为直径的 $\odot O$ 交 $\triangle ABC$ 的边 AB , AC 于 D , E 两点. 判断 $\triangle ODE$ 的形状, 并说明理由.



(第 13 题)



(第 14 题)

14. 如图, $\triangle ABC$ 为 $\odot O$ 的内接三角形, AB 为直径, 过点 C 作 $CD \perp AB$, 垂足为 D . 设 $AD = a$, $BD = b$.
- (1) 分别用 a , b 表示 OC , CD .
 - (2) OC 和 CD 的长之间有什么关系? 由此你能得到怎样的关于 a , b 的不等式?

第三十章 直线与圆的位置关系

在日常生活中，我们经常遇到一些有关直线与圆的位置关系的问题。例如，章前图中有哪些直线与圆的位置关系？用一张三角形的铁皮，怎样裁出一个与三条边都相切的圆形用料？如何利用圆或正多边形设计一些美丽的图案？要解决这些问题，需要进一步学习与圆有关的知识。

在上一章中，我们学习了圆的有关概念，知道了确定圆的方法，得到了圆的一些性质。在此基础上，本章将通过直观想象、操作确认、逻辑推理等方法，研究直线与圆、三角形与圆、正多边形与圆之间的关系，并用它们解决一些问题。



30.1 直线与圆

直线、圆都是基本的几何图形. 我们类比点与圆的位置关系的研究, 进行直线与圆的位置关系的研究, 并重点研究直线与圆相切.

30.1.1 直线与圆相离、相切、相交

思考

如图 30.1-1, 在纸上画一条直线 l , 把钥匙环看作一个圆, 在纸上移动钥匙环. 在移动钥匙环的过程中, 圆与直线 l 会有几种位置关系? 它们的公共点个数又是如何变化的?

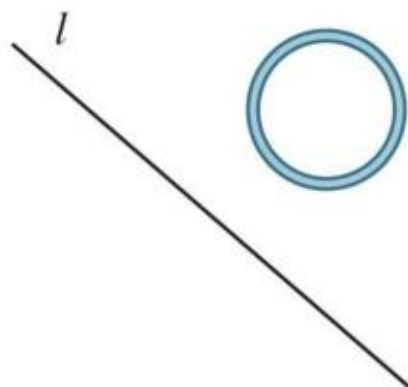


图 30.1-1

可以发现, 直线与圆有三种位置关系 (图 30.1-2):

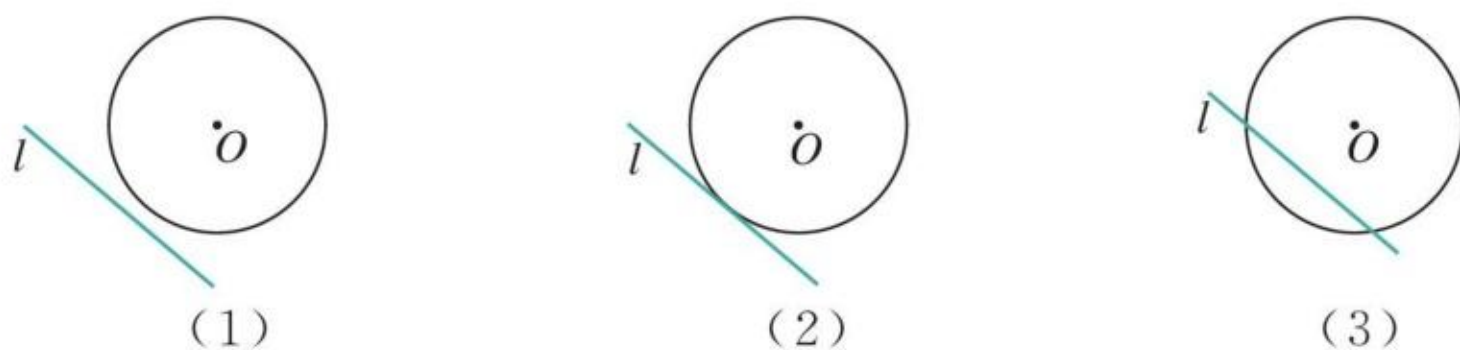


图 30.1-2

如图 30.1-2(1), 直线与圆没有公共点, 这时称这条直线与圆**相离**.

如图 30.1-2(2), 直线与圆只有一个公共点, 这时称这条直线与圆**相切**, 这条直线叫作圆的**切线** (tangent line), 这个点叫作**切点**.

如图 30.1-2(3), 直线与圆有两个公共点, 这时称这条直线与圆**相交**, 这条直线叫作圆的**割线**.

我们知道, 平面内一点 P 与 $\odot O$ 的位置关系, 可以根据点到圆心的距离 OP 与 $\odot O$ 的半径 r 的大小关系来确定. 类似地, 如何确定直线 l 与 $\odot O$ 的位置关系呢?

利用信息技术工具, 可以画出动态的图形, 以此方便研究直线与圆的位置关系. 有条件的同学可以试一试.

思考

如图 30.1-3, 设 $\odot O$ 的半径为 r , 圆心 O 到直线 l 的距离为 d . 在直线与圆的三种位置关系中, d 与 r 具有怎样的大小关系? 反过来, 你能根据 d 与 r 的大小关系确定直线与圆的位置关系吗?

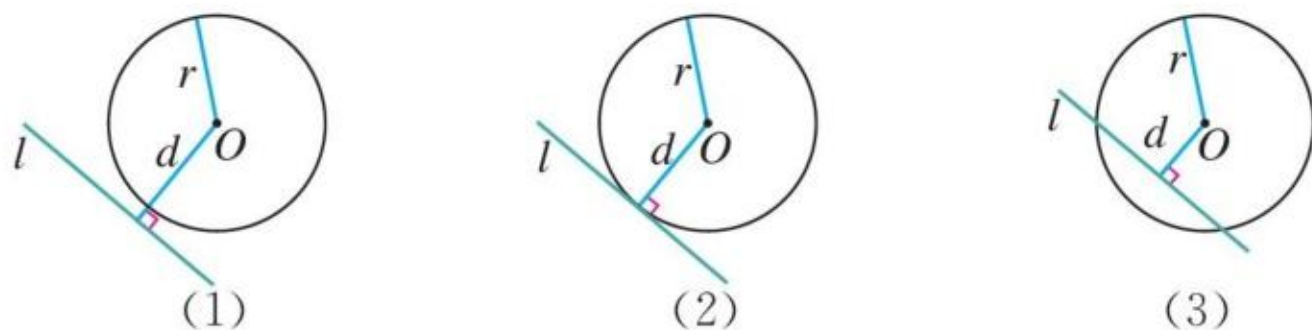


图 30.1-3

根据直线与圆相离、相切、相交的定义, 容易得到:

直线 l 与 $\odot O$ 相离 $\Leftrightarrow d > r$;

直线 l 与 $\odot O$ 相切 $\Leftrightarrow d = r$;

直线 l 与 $\odot O$ 相交 $\Leftrightarrow d < r$.

例 1 如图 30.1-4, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 5$, $BC = 12$. 以边 AB 的中点 D 为圆心, 以 r 为半径作 $\odot D$. 若 $r = 2.5$, 分别判断 AC , BC 与 $\odot D$ 的位置关系.

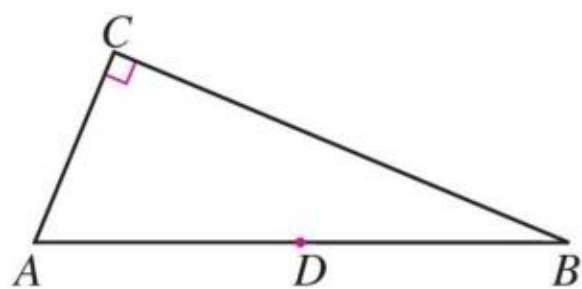


图 30.1-4

分析: 要判断 AC , BC 与 $\odot D$ 的位置关系, 只需求出圆心 D 到 AC , BC 的距离, 再根据其半径的大小关系作出判断.

解: 如图 30.1-5, 过圆心 D 分别作 AC , BC 的垂线, 垂足分别为 E , F , 则 DE , DF 的长分别为圆心 D 到 AC , BC 的距离.

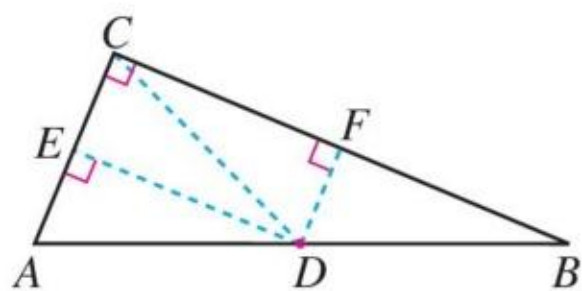


图 30.1-5

连接 CD , 由 D 为 AB 的中点, 得 $CD = AD = BD$, 因而 E , F 分别为 AC , BC 的中点. 所以 $DE = \frac{1}{2}BC$, $DF = \frac{1}{2}AC$.

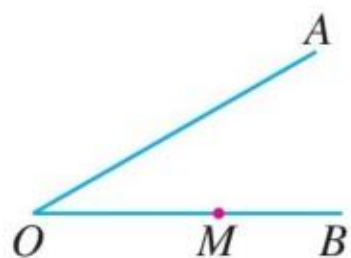
$$\because BC = 12, AC = 5, r = 2.5,$$

$$\therefore DE > r, DF = r.$$

$$\therefore AC \text{ 与 } \odot D \text{ 相离, } BC \text{ 与 } \odot D \text{ 相切.}$$

练习

- 圆的直径是 13, 如果圆心与直线的距离分别是
(1) 4.5, (2) 6.5, (3) 8,
那么直线与圆的位置关系分别是什么? 有几个公共点?
- 如图, $\angle AOB = 30^\circ$, M 为 OB 上一点, $OM = 5$. 判断直线 OA 与以点 M 为圆心, 下列 r 为半径的圆的位置关系:
(1) $r = 2$; (2) $r = 4$; (3) $r = 2.5$.



(第 2 题)

30.1.2 圆的切线

下面, 我们重点研究直线与圆相切的情况.

首先来看切线的性质. 如图 30.1-6, 直线 l 与 $\odot O$ 相切于点 A . 考虑到圆的有关性质多是通过与圆有关的线段和角来体现的, 连接 O, A 两点, 得到过切点 A 的半径 OA . 接下来, 研究 OA 与切线 l 的关系.

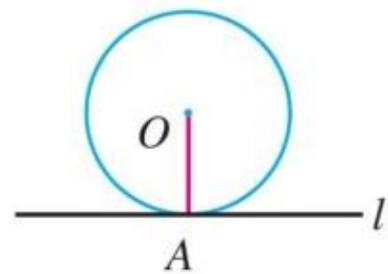


图 30.1-6

思考

$\odot O$ 的半径 OA 与过点 A 的切线 l 有什么关系?

如图 30.1-7, 设 P 为直线 l 上不同于点 A 的点, 因为直线 l 与 $\odot O$ 只有一个公共点 A , 所以点 P 在 $\odot O$ 外, 从而 $OP > OA$, 即半径 OA 是圆心 O 与直线 l 上的点的最短连线. 因此, 半径 OA 与直线 l 垂直 (可以用反证法证明), 由此得到切线的性质:

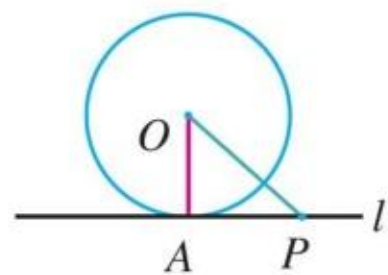


图 30.1-7

圆的切线垂直于过切点的半径.

接下来看切线的判定.

思考

按上述性质, 若 $\odot O$ 的切线 l 经过半径 OA 的外端点 A , 那么 $l \perp OA$. 反过来, 如图 30.1-8, 若直线 l 过半径 OA 的外端点 A , 且 $l \perp OA$, 那么直线 l 是 $\odot O$ 的切线吗?

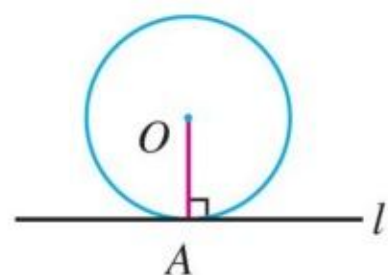


图 30.1-8

可以看出,这时圆心 O 到直线 l 的距离就是 $\odot O$ 的半径,因而直线 l 就是 $\odot O$ 的切线.由此可以得到切线的判定定理:

经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

例 2 如图 30.1-9, AB 是 $\odot O$ 的弦, PA 是 $\odot O$ 的切线, $PA=PB$. 求证: PB 是 $\odot O$ 的切线.

分析: 因为点 B 在 $\odot O$ 上,所以 OB 为 $\odot O$ 的半径.要证明 PB 是 $\odot O$ 的切线,只需证明 $PB \perp OB$.

证明: 如图 30.1-10, 连接 OA , OB , OP .

- $\because PA$ 与 $\odot O$ 相切于点 A ,
- $\therefore PA \perp OA$, 即 $\angle PAO = 90^\circ$.
- $\because PA = PB$, $OA = OB$, $OP = OP$,
- $\therefore \triangle PAO \cong \triangle PBO$.
- $\therefore \angle PBO = \angle PAO = 90^\circ$.
- $\therefore PB \perp OB$.

这样, PB 经过 $\odot O$ 的半径 OB 的外端点 B , 并且垂直于半径 OB , 所以 PB 是 $\odot O$ 的切线.

已知一个圆和圆上的一点,如何过这个点作圆的切线?

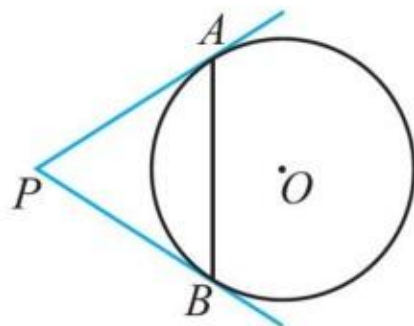


图 30.1-9

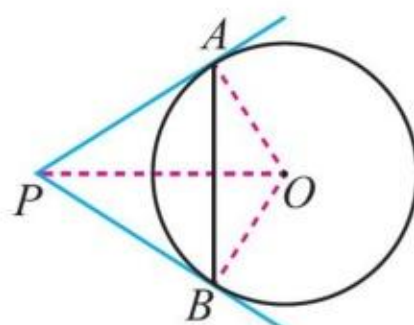


图 30.1-10

在解决有关圆的切线的问题时,常常需要作过切点的半径.

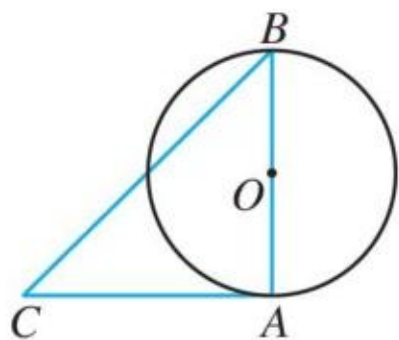
在生活中,有许多直线与圆相切的实例.例如,列车车轮的边沿与铁轨的上沿是相切的,在砂轮上打磨工件时产生的火星是沿着圆的切线飞出的(图 30.1-11).



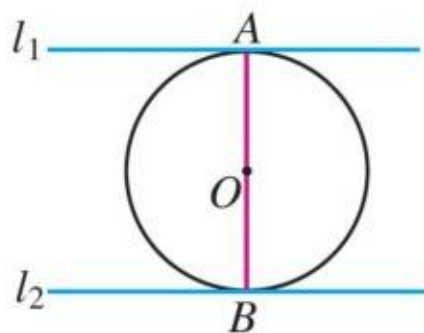
图 30.1-11

练习

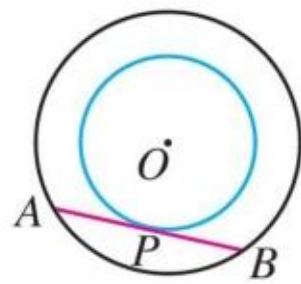
1. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, $\angle ABC = 45^\circ$, $AC = AB$. 求证: AC 是 $\odot O$ 的切线.



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

2. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 直线 l_1, l_2 是 $\odot O$ 的切线, A, B 是切点. l_1, l_2 有怎样的位置关系? 证明你的结论.
3. 如图, 在以点 O 为圆心的两个同心圆中, 大圆的弦 AB 与小圆相切, 点 P 为切点. 求证 $AP = BP$.

我们已经知道过圆上一点作圆的切线的方法, 下面研究如何过圆外一点作圆的切线.

如图 30.1-12, P 是 $\odot O$ 外一点, 要过点 P 作 $\odot O$ 的切线. 因为两点确定一条直线, 并且所求作的直线过点 P 且与 $\odot O$ 相切, 所以需在 $\odot O$ 上确定一点 A , 满足 $OA \perp AP$, 即 $\angle OAP = 90^\circ$. 由此可知, 点 O, P, A 可以确定一个圆, OP 是这个圆的直径. 因此以 OP 为直径作圆, 该圆与 $\odot O$ 的交点即所要确定的点.

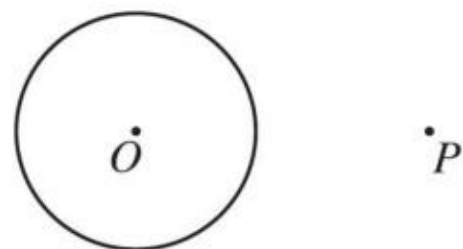


图 30.1-12

根据上面的想法, 可以用直尺和圆规作出过圆外一点的圆的切线*.

如图 30.1-13:

- (1) 连接 OP , 作线段 OP 的垂直平分线 MN , 与 OP 交于点 C ;
- (2) 以点 C 为圆心, CO 为半径作圆, 与 $\odot O$ 相交于 A, B 两点;

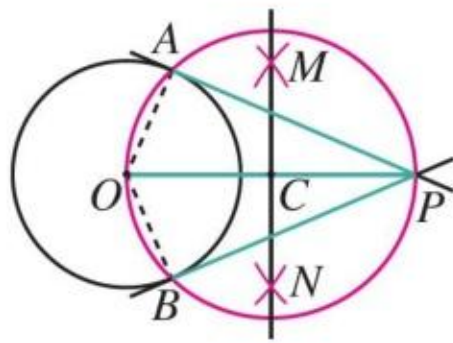


图 30.1-13

* 过圆外一点作圆的切线的尺规作图为选学内容.

(3) 作直线 PA , PB , 即所求作的切线.

可以看到, 过圆外一点可以作出两条直线与这个圆相切. 我们把经过圆外一点的圆的切线上, 这点和切点之间线段的长 (如图 30.1-13 中的线段 PA , PB 的长), 叫作这点到圆的**切线长**.

思考

如图 30.1-14, PA , PB 是 $\odot O$ 的两条切线, 切点分别为 A , B , 过点 O , P 作直线 OP . 线段 PA 与 PB , $\angle APO$ 与 $\angle BPO$ 有什么关系?

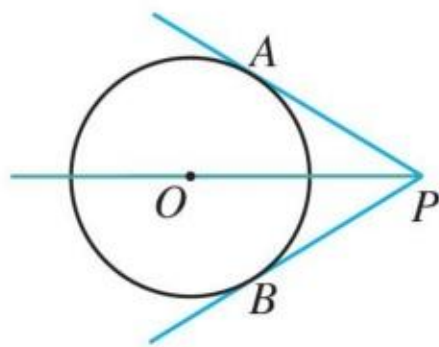


图 30.1-14

如图 30.1-15, 连接 OA 和 OB .

$\because PA$ 和 PB 是 $\odot O$ 的两条切线,

$\therefore OA \perp AP$, $OB \perp BP$.

又 $OA = OB$, $OP = OP$,

$\therefore \text{Rt}\triangle POA \cong \text{Rt}\triangle POB$.

$\therefore PA = PB$, $\angle APO = \angle BPO$.

由此得到切线长定理*:

从圆外一点引圆的两条切线, 它们的切线长相等, 并且这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角.

例 3 如图 30.1-16, PA , PB 是 $\odot O$ 的两条切线, A , B 是切点, 连接 AB , 若 $\angle APO = 30^\circ$, $OP = 2$, 求 $\triangle PAB$ 的周长.

解: 如图 30.1-17, 连接 OA .

$\because PA$, PB 是 $\odot O$ 的两条切线, A , B 是切点,

$\therefore PA = PB$, $\angle APO = \angle BPO$, $OA \perp PA$.

又 $\angle APO = 30^\circ$,

$\therefore \angle APB = 60^\circ$.

$\therefore \triangle PAB$ 是等边三角形.

$\therefore AB = PA = PB$.

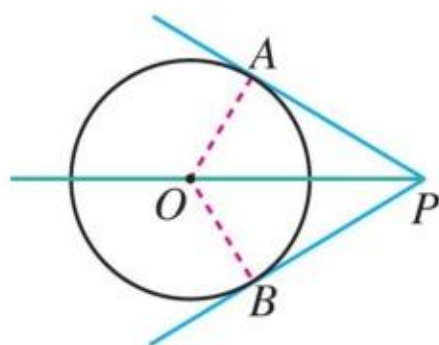


图 30.1-15

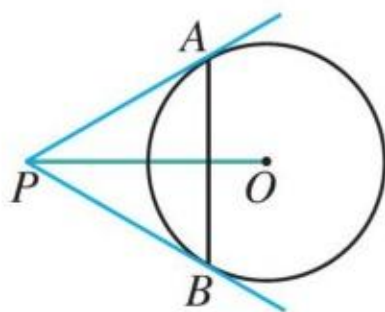


图 30.1-16

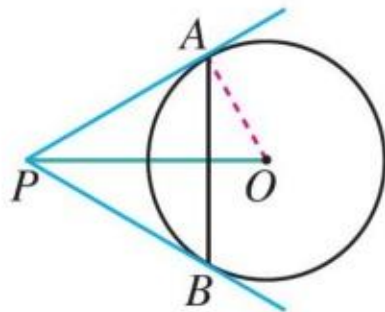


图 30.1-17

* 切线长定理的探索与证明为选学内容.

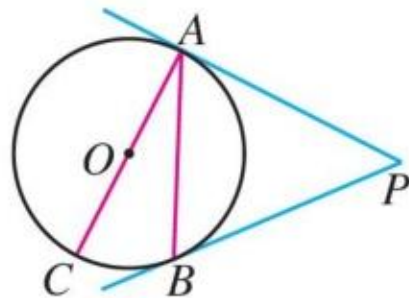
又 在 $\text{Rt}\triangle POA$ 中, $\angle APO=30^\circ$, $OP=2$,

$$\therefore OA=1, PA=\sqrt{OP^2-OA^2}=\sqrt{3}.$$

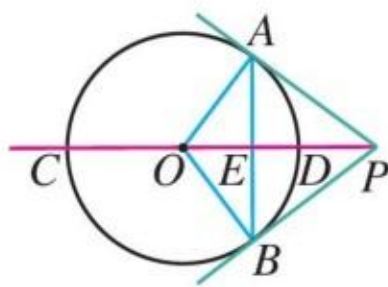
$\therefore \triangle PAB$ 的周长为 $3\sqrt{3}$.

练习

1. 如图, PA, PB 是 $\odot O$ 的两条切线, A, B 为切点, AC 是 $\odot O$ 的直径, $\angle BAC=25^\circ$. 求 $\angle P$ 的度数.



(第1题)



(第2题)

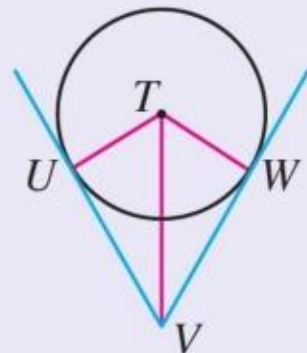
2. 如图, PA, PB 是 $\odot O$ 的两条切线, A, B 为切点, 直线 OP 交 $\odot O$ 于点 C, D , 交 AB 于点 E .

- (1) 写出图中所有垂直关系;
- (2) 如果 $PA=4$, $PD=2$, 求 $\odot O$ 的半径长.

习题 30.1

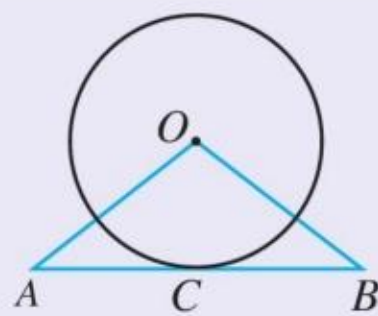
复习巩固

1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=3$, $BC=4$, 判断以点 C 为圆心, 下列 r 为半径的 $\odot C$ 与 AB 的位置关系:
 - (1) $r=2$; (2) $r=2.4$; (3) $r=3$.
2. 一根钢管放在 V 形架内, 其横截面如图所示, 钢管的半径是 25 cm.
 - (1) 如果 $UV=28$ cm, 求 VT 的长;
 - (2) 如果 $\angle UVW=60^\circ$, 求 VT 的长.



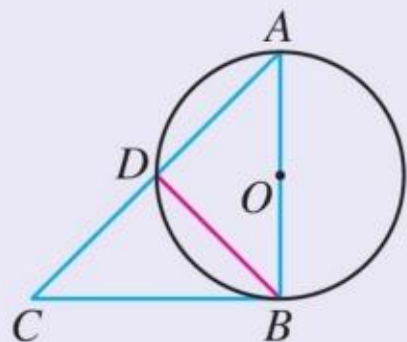
(第2题)

3. 如图, 直线 AB 经过 $\odot O$ 上的点 C , 并且 $OA=OB$, $CA=CB$. 求证: 直线 AB 是 $\odot O$ 的切线.

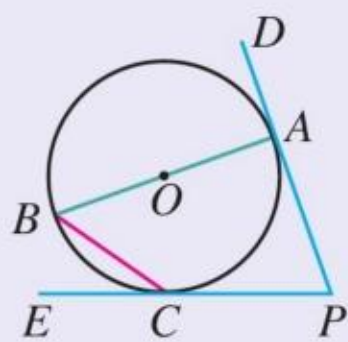


(第 3 题)

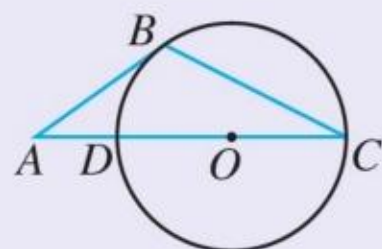
4. 如图, 在 $\odot O$ 中, AB 为直径, AD 为弦, 过点 B 的切线与 AD 的延长线相交于点 C , 且 $AD=DC$. 求 $\angle ABD$ 的度数.



(第 4 题)



(第 5 题)



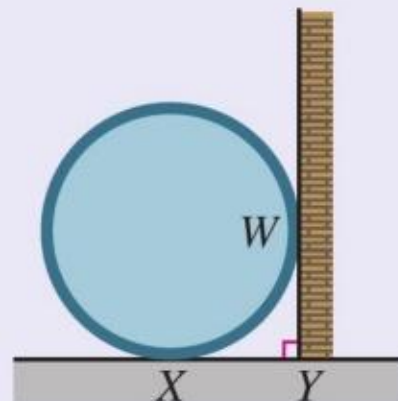
(第 6 题)

5. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, PD , PE 分别与 $\odot O$ 相切于点 A , C , $\angle BCE=35^\circ$. 求 $\angle P$ 的度数.

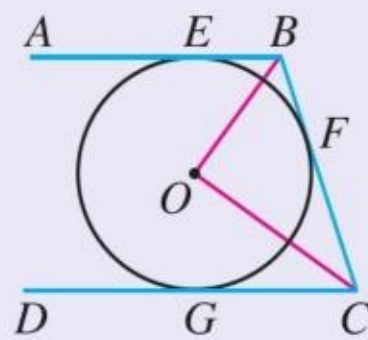
6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, O 为 AC 上一点, $\odot O$ 过 B , C 两点, 且与 AC 交于点 D , $\angle A=36^\circ$, $\angle C=27^\circ$. 求证: AB 是 $\odot O$ 的切线.

综合运用

7. 如图, 一个油桶靠在直立的墙边, 量得 $WY=0.65$ m, 且 $XY \perp WY$. 这个油桶的底面半径是多少? 为什么?



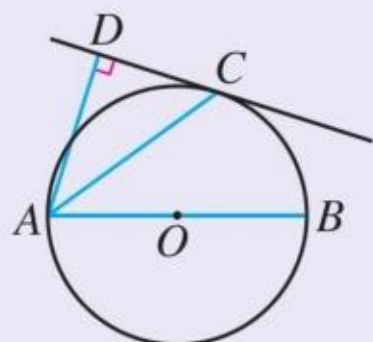
(第 7 题)



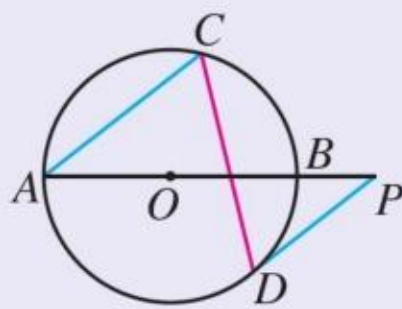
(第 8 题)

8. 如图, AB , BC , CD 分别与 $\odot O$ 相切于 E , F , G 三点, 且 $AB \parallel CD$, $BO=6$, $CO=8$. 求 BC 的长.

9. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, C 为 $\odot O$ 上一点, AD 和过点 C 的切线互相垂直, 垂足为 D . 求证: AC 平分 $\angle DAB$.



(第 9 题)

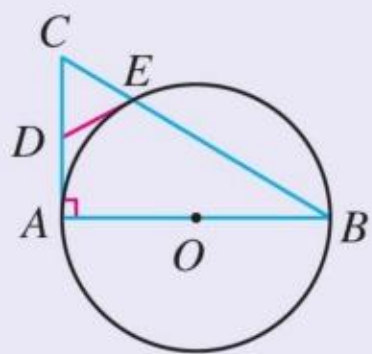


(第 10 题)

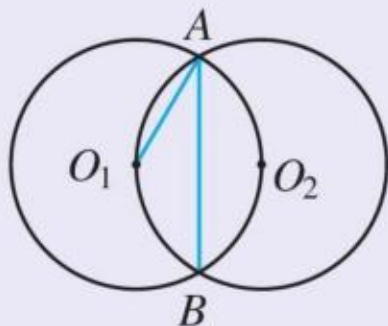
10. 如图, $\odot O$ 的直径 AB 与弦 CD 相交, $\angle BAC=38^\circ$. 过点 D 作 $\odot O$ 的切线, 与 AB 的延长线交于点 P , 且 $DP \parallel AC$. 求 $\angle ACD$ 的度数.

拓展探索

11. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 90^\circ$, D 为 AC 的中点, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于点 E . 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线.



(第 11 题)



(第 12 题)

12. 如图, 等圆 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A, B 两点, $\odot O_1$ 经过 $\odot O_2$ 的圆心 O_2 . 求 $\angle O_1AB$ 的度数.

探究与发现

圆与圆的位置关系

我们已经学习了点与圆、直线与圆的位置关系, 下面来研究圆与圆的位置关系.

在两张透明的纸上分别画两个半径不同的圆 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$, 把两张纸叠放在一起, 固定其中一张, 移动另一张, 可以发现, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的位置可能出现以下几种情况 (图 1).

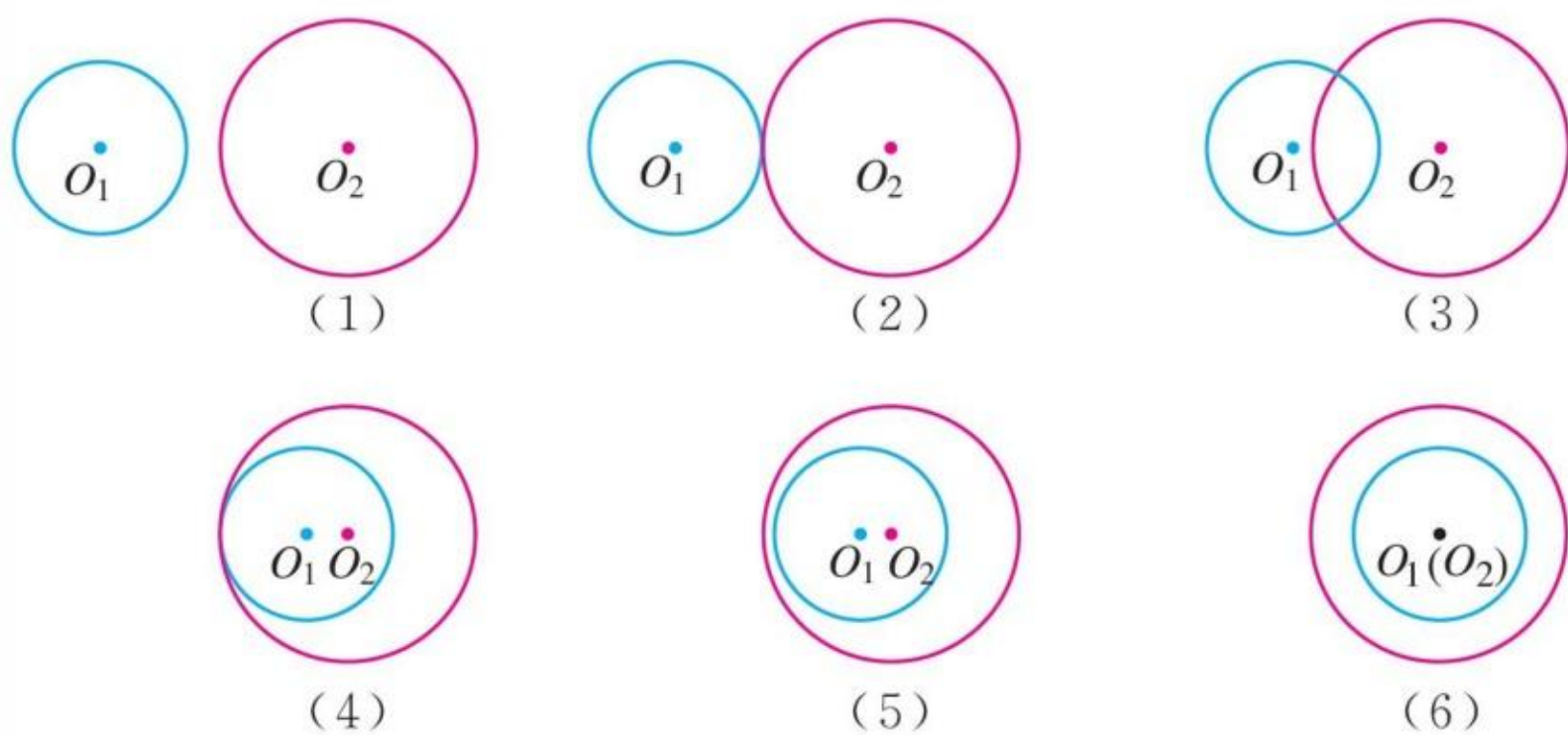


图 1

如果两个圆没有公共点，那么就说这两个圆相离，如图 1 中 (1) (5) (6) 所示. 其中 (1) 叫作外离，(5) (6) 叫作内含，(6) 中的同心圆是两圆内含的一种特殊情况. 如果两个圆只有一个公共点，那么就说这两个圆相切，如图 1 中 (2) (4) 所示. 其中 (2) 叫作外切，(4) 叫作内切. 如果两个圆有两个公共点，那么就说这两个圆相交，如图 1 中 (3) 所示.

类比研究点与圆、直线与圆的位置关系，也可以用两圆的半径和两圆的圆心距（两圆圆心的距离）来刻画两圆的位置关系. 如果两圆的半径分别为 r_1 和 r_2 ，圆心距为 d ，请你利用 d 与 r_1 和 r_2 之间的关系讨论两圆的位置关系，并完成下表：

两圆的位置关系	d 与 r_1 和 r_2 之间的关系
外离	$d > r_1 + r_2$
外切	
相交	
内切	
内含	

圆与圆的各种位置关系在生活中随处可见（图 2），你还能再举出一些例子吗？



图 2

30.2 三角形的内切圆

我们学过三角形的外接圆，知道这个圆经过三角形的三个顶点. 类似地，我们来研究是否存在与三角形的三条边都相切的圆.

思考

图 30.2-1 是一块三角形的铁皮，如何在它上面截下一块圆形用料，并且所截的圆与三角形的三条边都相切？

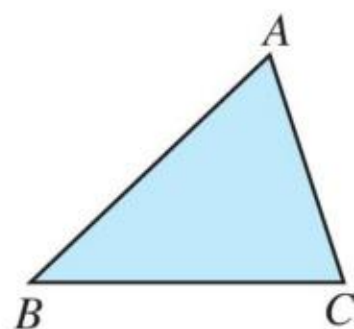


图 30.2-1

假设符合条件的圆已经作出，那么这个圆的圆心到三角形三边的距离都等于半径. 如何确定这个圆的圆心和半径呢？

因为三角形的三条角平分线交于一点，并且这个点到三条边的距离相等，所以只需作出三角形两个内角的平分线，它们的交点即这个圆的圆心，圆心到任意一边的距离即这个圆的半径.

这样，用直尺和圆规就可以作出与三角形三条边都相切的圆.

如图 30.2-2，分别作 $\angle B$ ， $\angle C$ 的平分线 BM ， CN ，设它们相交于点 I ，那么点 I 到 AB ， BC ， CA 的距离都相等. 过点 I 作 BC 的垂线，垂足为 D . 以点 I 为圆心， ID 为半径作圆，则 $\odot I$ 与 $\triangle ABC$ 的三条边都相切， $\odot I$ 即所求作的圆.

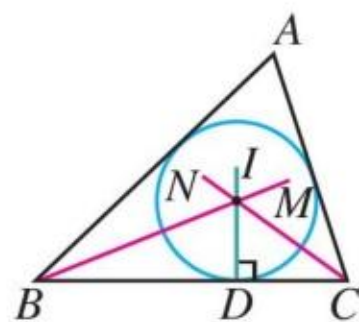


图 30.2-2

与三角形各边都相切的圆叫作**三角形的内切圆**，内切圆的圆心是三角形三条角平分线的交点，叫作**三角形的内心**，这个三角形叫作**圆的外切三角形**.

例 如图 30.2-3， $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 与 BC ， CA ， AB 分别相切于点 D ， E ， F ，且 $AB=9$ ， $BC=14$ ， $CA=13$. 求 AF ， BD ， CE 的长.

解： 设 $AF=x$ ，则 $AE=x$.

则 $BD=BF=AB-AF=9-x$ ，

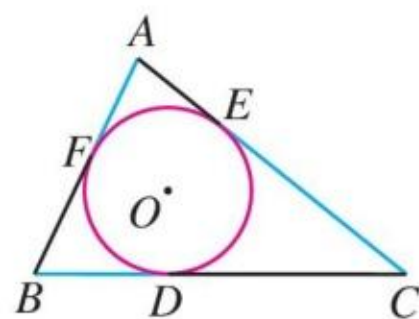


图 30.2-3

$$CD = CE = AC - AE = 13 - x.$$

由 $BD + CD = BC$, 可得

$$(9 - x) + (13 - x) = 14.$$

解得

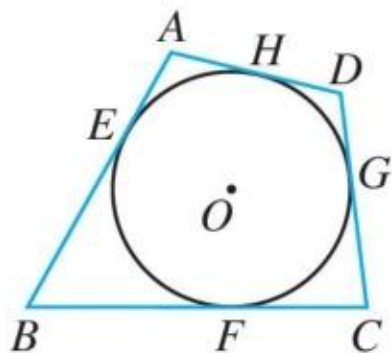
$$x = 4.$$

因此

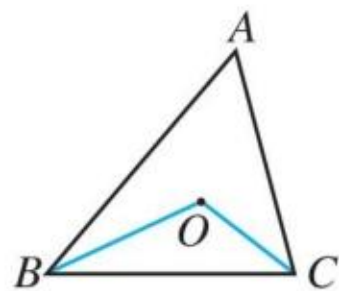
$$AF = 4, BD = 5, CE = 9.$$

练习

1. 如图, 四边形 $ABCD$ 的各边与 $\odot O$ 分别相切于点 E, F, G, H . 求证: $AB + DC = AD + BC$.



(第1题)



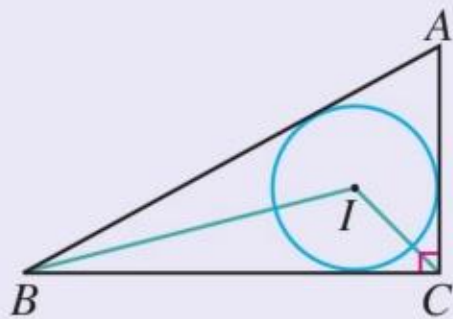
(第2题)

2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle ACB = 75^\circ$, 点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心. 求 $\angle BOC$ 的度数.
3. $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r , $\triangle ABC$ 的周长为 l . 求 $\triangle ABC$ 的面积. (提示: 设 $\triangle ABC$ 的内心为 O , 连接 OA, OB, OC .)

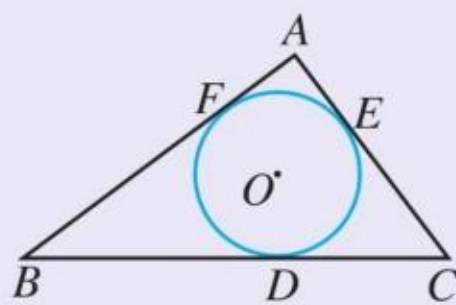
习题 30.2

复习巩固

1. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, I 是内心, $\angle BIC = 120^\circ$, $AC = 2$, 求 AB 的长.



(第1题)

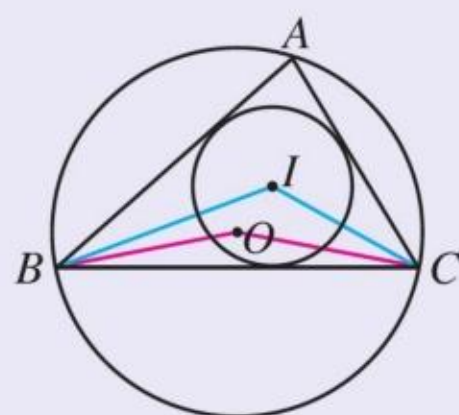


(第2题)

2. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, 切点为 D, E, F . 若 $AE = 1$, $CD = 2$, $BF = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

综合运用

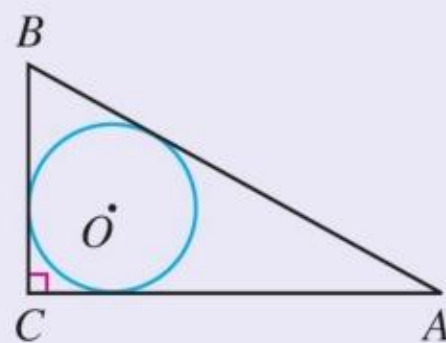
3. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, O 是外心, I 是内心, $\angle BIC = 130^\circ$, 求 $\angle BOC$ 的度数.



(第 3 题)

拓广探索

4. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AB , BC , CA 的长分别为 c , a , b , 求 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 r .



(第 4 题)

30.3 正多边形与圆

我们知道，三角形有外接圆和内切圆，多边形是否有外接圆和内切圆呢？对于一般的多边形，容易知道，不一定有圆经过它的各个顶点，也不一定有圆与它的各边都相切. 对于特殊的多边形，例如正多边形，情况又怎样呢？

各边相等、各角也相等的多边形是正多边形. 日常生活中，我们经常能看到正多边形形状的物体，以及利用正多边形构造的美丽图案（图 30.3-1）. 你还能举出一些这样的例子吗？

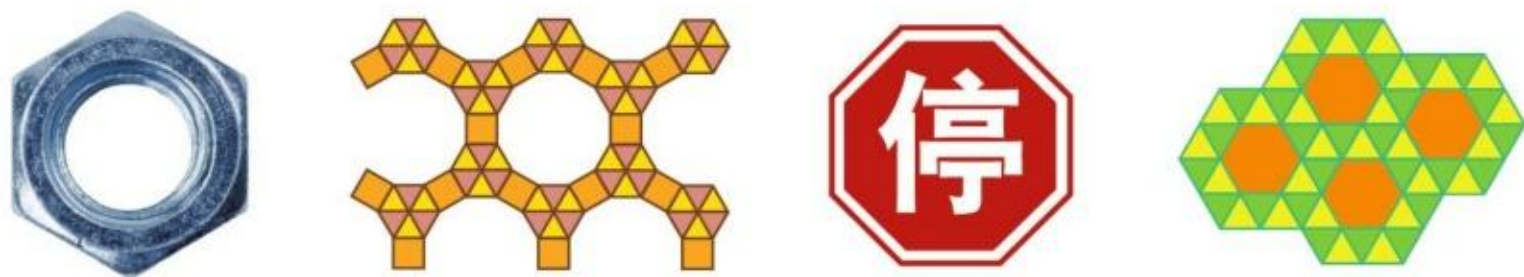


图 30.3-1

正多边形和圆的关系非常密切. 只要把一个圆分成相等的一些弧，以各分点为顶点的多边形就是这个圆的内接正多边形，这个圆就是这个正多边形的外接圆；经过各分点作圆的切线，以相邻切线的交点为顶点的多边形就是这个圆的外切正多边形，这个圆就是这个正多边形的内切圆. 例如，图 30.3-2(1) 中的多边形是 $\odot O$ 的内接正九边形，图 30.3-2(2) 中的多边形是 $\odot O$ 的外切正六边形.



图 30.3-2

下面以圆的内接正五边形为例进行证明.

如图 30.3-3，把 $\odot O$ 分成相等的 5 段弧，依次连接各分点得到五边形 $ABCDE$.

$$\because \widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EA},$$

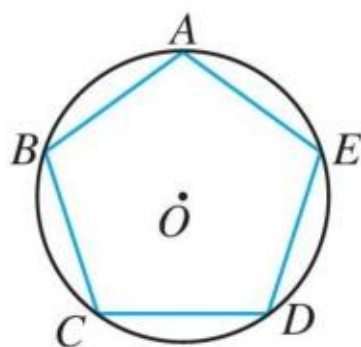


图 30.3-3

$$\therefore AB=BC=CD=DE=EA, \widehat{BCE}=3\widehat{AB}=\widehat{CDA}.$$

$$\therefore \angle A=\angle B.$$

同理 $\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$.

又 五边形 $ABCDE$ 的顶点都在 $\odot O$ 上,

$\therefore$ 五边形 $ABCDE$ 是 $\odot O$ 的内接正五边形, $\odot O$ 是正五边形 $ABCDE$ 的外接圆.

我们把正多边形的外接圆的圆心叫作**正多边形的中心**, 外接圆的半径叫作**正多边形的半径**, 正多边形每一边所对的圆心角叫作**正多边形的中心角**, 中心到正多边形的一边的距离叫作**正多边形的边心距** (图 30.3-4).

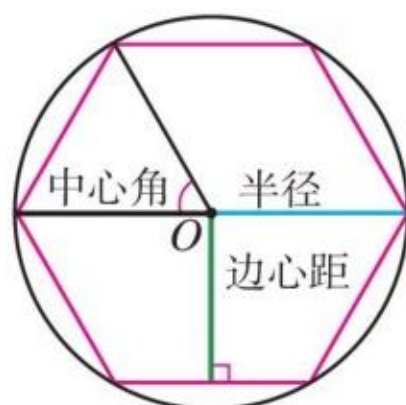


图 30.3-4

思考

正 n 边形的一个内角的度数是多少? 外角呢? 中心角呢? 正多边形的中心角与外角的大小有什么关系?

例 延安宝塔是革命圣地延安的标志和象征, 它是一个八角九层楼阁式砖塔, 其塔基的形状是半径为 6 m 的正八边形 (图 30.3-5). 求塔基的面积 (结果保留小数点后一位).

解: 如图 30.3-5, 连接 OA, OB , 作 $AP \perp OB$, 垂足为 P .

$\therefore$ 八边形 $ABCDEFGH$ 是半径为 6 m 的正八边形,

$$\therefore OA=OB=6, \angle AOB=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ.$$

又 $\triangle APO$ 为直角三角形,

$$\therefore \angle OAP=\angle AOB.$$

$$\therefore AP=OP.$$

在 $\text{Rt}\triangle APO$ 中, 由勾股定理, 得 $AP^2+OP^2=OA^2$.

$$\therefore AP=\frac{\sqrt{2}}{2}OA=3\sqrt{2}.$$

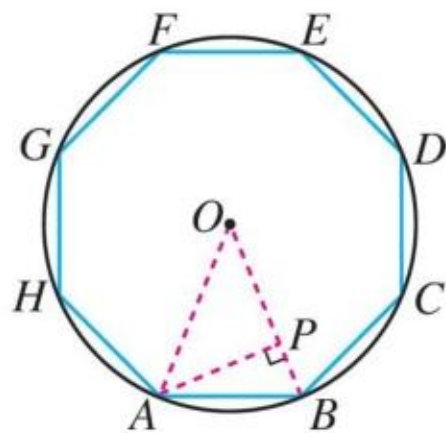


图 30.3-5

因此, 塔基的面积

$$S = 8 \times \frac{1}{2} \times OB \times AP = 8 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{2} = 72\sqrt{2} \approx 101.8(\text{m}^2).$$

练习

1. 各边相等的圆内接多边形是正多边形吗? 各角相等的圆内接多边形呢? 如果是, 说明理由; 如果不是, 举出反例.
2. 分别求半径为 R 的圆内接正三角形、正方形的边长、边心距和面积.

实际生活中, 我们经常遇到画正多边形的问题, 比如画一个六角螺帽的平面图、画一个五角星等, 这些问题都与等分圆周有关. 要制造如图 30.3-6 中的零件, 也需要等分圆周.

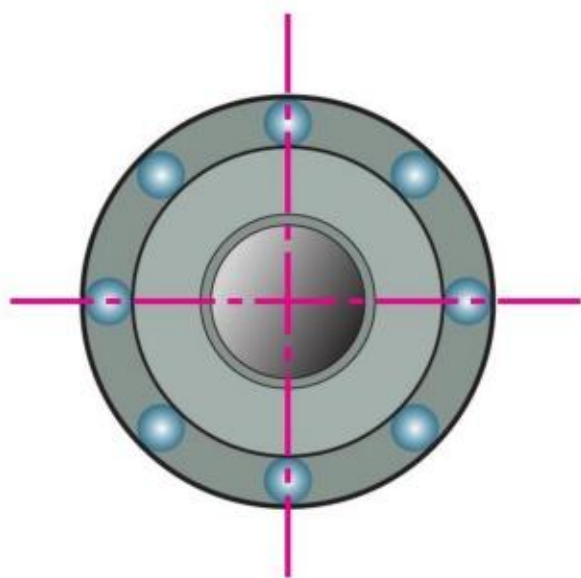


图 30.3-6

由于同圆中相等的圆心角所对的弧相等, 因此作相等的圆心角就可以等分圆周, 从而得到相应的正多边形. 例如, 画一个边长为 1.5 cm 的正六边形时, 可以以 1.5 cm 为半径作一个 $\odot O$, 用量角器画一个 $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ 的圆心角, 它对着一段弧, 然后在圆上依次截取与这条弧相等的弧, 就得到圆的 6 个等分点, 再顺次连接各分点, 即可得到正六边形 (图 30.3-7).

对于一些特殊的正多边形, 还可以用直尺和圆

利用这种方法, 可以画出任意的正 n 边形.

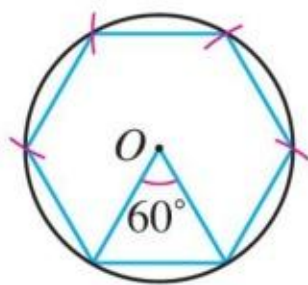


图 30.3-7

规来作图. 例如, 由于正六边形的边长等于半径, 在半径为 R 的圆上, 从某一点开始, 依次以 R 为半径画弧, 就可以把圆六等分, 顺次连接各分点就得到半径为 R 的正六边形 (图 30.3-8), 进而可以作出正三角形、正十二边形. 再如, 在上一章的数学活动中, 我们已经用直尺和圆规四等分圆周, 顺次连接各分点, 便可以得到正方形 (图 30.3-9), 进而可以作出正八边形、正十六边形.

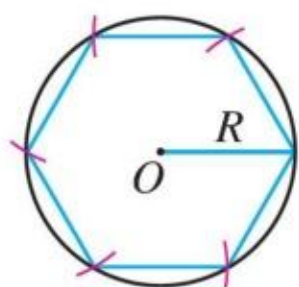


图 30.3-8

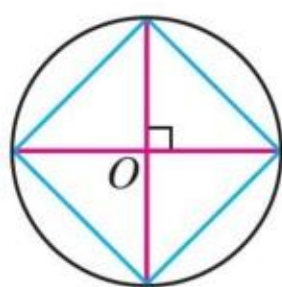
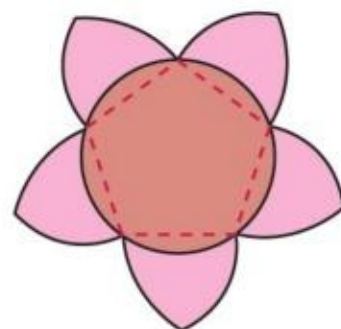
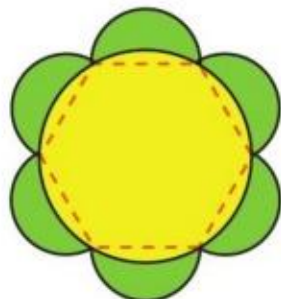
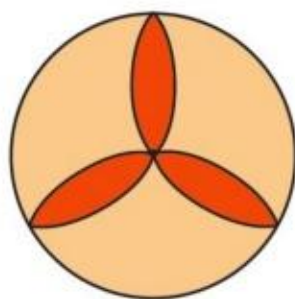


图 30.3-9

练习

1. 画一个半径为 2 cm 的正五边形, 再作出这个正五边形的各条对角线, 画出一个五角星.
2. 用等分圆周的方法画出下列图案:



(第 2 题)

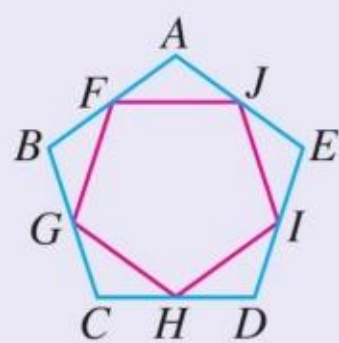
习题 30.3

复习巩固

1. 完成下表中有关正多边形的计算:

正多边形边数	内角	中心角	半径	边长	边心距	周长	面积
3	60°			$2\sqrt{3}$			
4			$\sqrt{2}$				
6					$\sqrt{3}$		

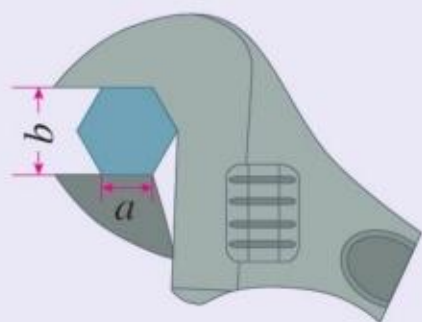
2. 要用圆形铁片截出边长为 a 的正方形铁片, 所选圆形铁片的半径至少是多少?
3. 正多边形都是轴对称图形吗? 如果是, 它的对称轴在哪里? 正多边形都是中心对称图形吗? 如果是, 它的对称中心在哪里?
4. 如图, F, G, H, I, J 分别是正五边形 $ABCDE$ 各边的中点. 求证: 五边形 $FGHIJ$ 是正五边形.



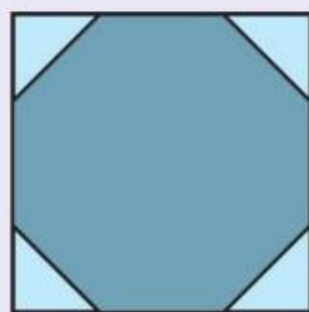
(第4题)

综合运用

5. 如图, 要拧开一个边长 $a=12\text{ mm}$ 的六角形螺帽, 扳手张开的开口 b 至少是多少?



(第5题)



(第6题)

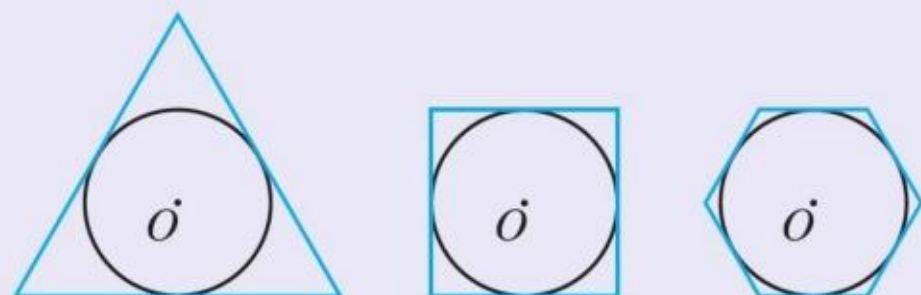
6. 如图, 正方形的边长为 4, 剪去四个角后成为一个正八边形, 求这个正八边形的边长和面积.
7. 如图, 一个亭子底部基座的形状是半径为 4 m 的正六边形, 求底部基座的周长和面积 (结果保留小数点后一位).
8. 用 48 m 长的篱笆在空地上围成一个绿化场地, 现有四种方案: 正三角形、正方形、正六边形、圆, 哪种方案所围场地的面积最大?



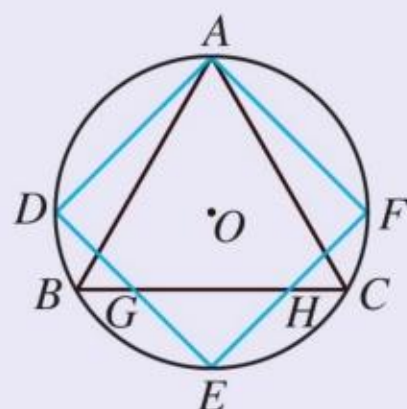
(第7题)

拓广探索

9. 如图, $\odot O$ 的半径是 R , 分别求它的外切正三角形、外切正方形、外切正六边形的边长.



(第9题)



(第10题)

10. 如图, 等边三角形 ABC 和正方形 $ADEF$ 内接于 $\odot O$, DE, FE 分别与 BC 相交于点 G, H . 若 $\odot O$ 的半径为 R , 求 GH 的长.

清代蒙古族数学家、天文学家明安图（约 1692—约 1764）在《割圆密率捷法》一书中论证了圆周率的无穷级数表达式等公式。为了纪念他的贡献，1999 年发现的一颗小行星被命名为“明安图星”。



明安图塑像

用分析的方法计算

随着微积分的诞生，圆周率的计算进入了分析法时期。欧拉用威廉·琼斯引进的符号“ π ”表示圆周率，并证明了很多关于 π 的无穷级数表达式，使 π 的计算更准确、快速。



$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

欧拉和他的 π 的无穷级数表达式

中国超级计算机：神威·太湖之光



1949 年，世界首台通用计算机 ENIAC 计算出 π 的小数点后第 2 037 位，标志着 π 的计算进入了新时期。如今，借助超级计算机，已经可以计算到 π 的小数点后上万亿位。

现代对 π 的计算



关于圆周率的各种计算方法承载着人类智慧的积淀，这使得圆周率成为了数学中最有魅力的数字之一！于是，从 2020 年开始，每年 3 月 14 日被定为国际数学日，也被称为“ π 日”。

数学活动

活动1 纸条平结

平结是一种古老、实用的结索，以一线（或一物）为轴，将另一线的两端绕轴穿梭而成，是中国结（图 1）的基本结之一。“平”有高低相等、不相上下之意，同时又有稳定的含义，给人以四平八稳之感。

利用纸条平结可以得到多种几何图形。例如，我们可以将一根足够长的矩形纸条打一个简单的结，收紧并按压平整，就得到了一个五边形（图 2）。

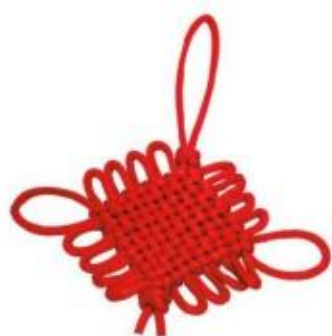


图 1



图 2

分别用刻度尺和量角器测量一下这个五边形的各边长和各内角度数，你有什么发现？你能证明你的发现吗？

活动2 利用等分圆周设计图案

许多图案设计都和圆有关。图 3 是北京大兴国际机场一种地砖的图案，形如展翅的凤凰。图 4 是一些利用等分圆周设计出的图案。



图 3



图 4

如图 5，利用等分圆周得到的正多边形，也可以设计出一些图案。

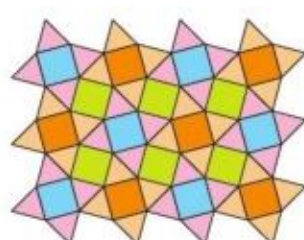
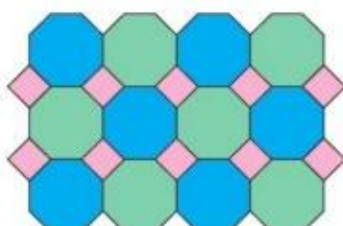
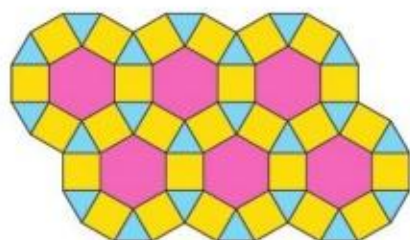
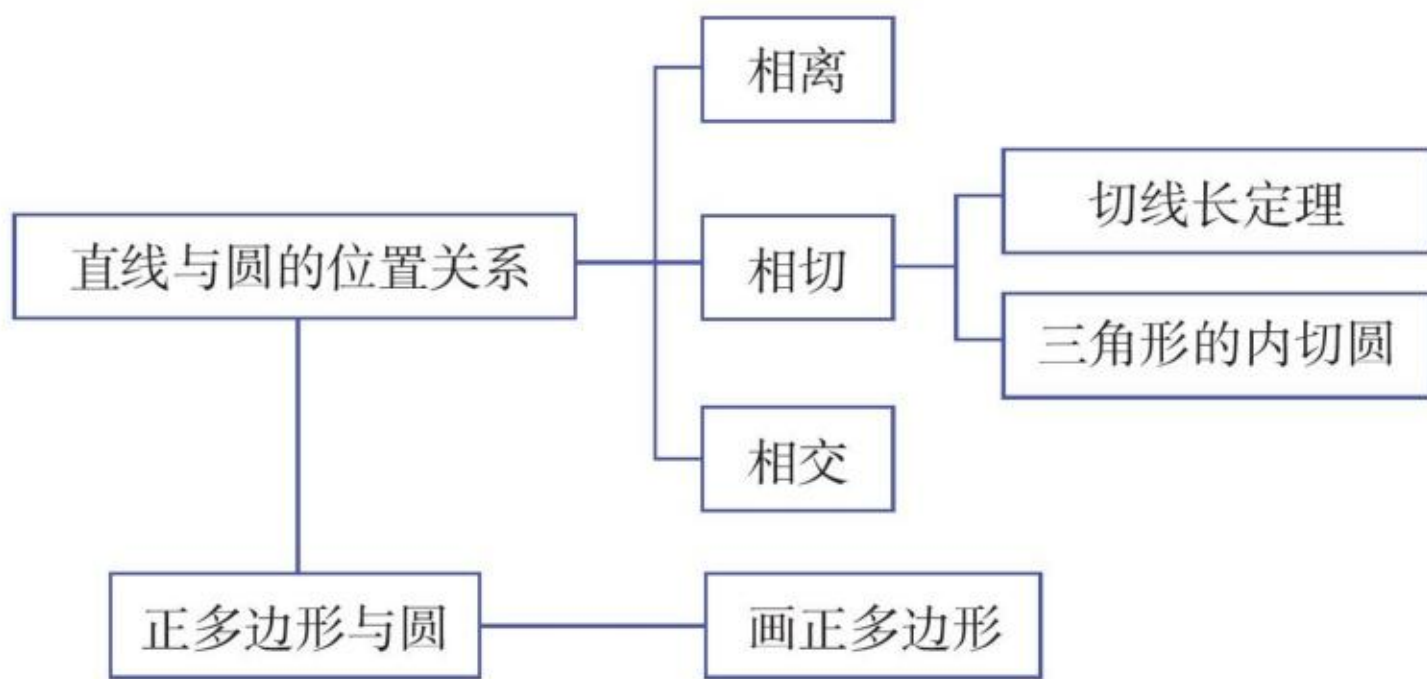


图 5

你能画出其中的一些图案吗？请你再利用圆或正多边形设计一些图案，并与同学交流。

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

在本章中，我们研究了直线与圆的三种位置关系，重点研究了圆的切线的性质和判定，由此得到圆的切线的尺规作图方法，探索并证明了切线长定理。在此基础上，学习了三角形内切圆的相关概念与尺规作图方法、圆与正多边形的关系以及圆在图案设计等方面的应用。

在学习本章的过程中，我们通过类比点与圆的位置关系，从位置和数量两个方面刻画直线与圆的位置关系；通过直观想象、操作确认、逻辑推理，得到直线与圆相切时过切点的半径与切线垂直的位置关系；通过测量计算、尺规作图得到了作圆的内接正多边形的方法，从而进一步认识了几种基本几何图形之间的联系。这些内容的学习，进一步提升了我们的推理能力，帮助我们养成用数学的思维思考问题的习惯。

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧。

1. 直线与圆有怎样的位置关系？你能举出这些位置关系的一些实例吗？你能用哪些方法刻画这些位置关系？
2. 直线与圆相切时，具有哪些性质？怎样判定直线与圆相切？
3. 怎样用直尺和圆规过圆上或圆外一点作圆的切线？你能说明这样作图的道理吗？

4. 过圆外一点作圆的两条切线, 你能由此得到什么性质?
5. 怎样用直尺和圆规作出一个三角形的内切圆? 你能说出内切圆的圆心和半径是如何确定的吗?
6. 正多边形与圆有什么关系?



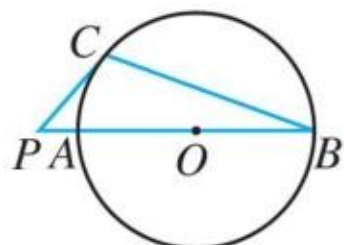
复习题 30

复习巩固

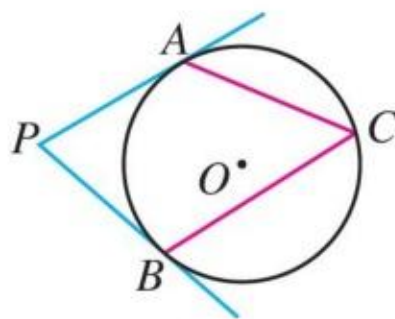
1. 选择题.

- (1) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 过 $\odot O$ 上一点 C 作 $\odot O$ 的切线, 所作切线与 BA 的延长线交于点 P , $\angle B = 20^\circ$, 则 $\angle P =$ ().

(A) 20° (B) 25° (C) 40° (D) 50°



(1)



(2)

(第 1 题)

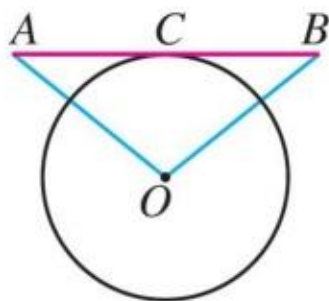
- (2) 如图, PA, PB 分别与 $\odot O$ 相切于 A, B 两点, $\angle P = 70^\circ$, 则 $\angle C =$ ().

(A) 70° (B) 55° (C) 110° (D) 140°

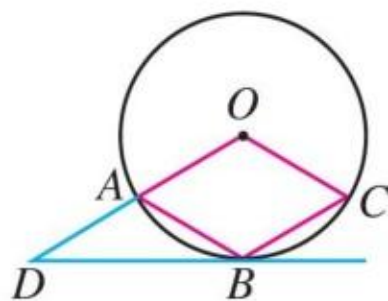
- (3) 尝试以半径为 1 的圆的内接正三角形、正方形、正六边形的边心距为三边作三角形, 则 ().

(A) 不能作出三角形 (B) 能作出等腰三角形
(C) 能作出直角三角形 (D) 能作出钝角三角形

2. 如图, AB 与 $\odot O$ 相切于点 C , $OA = OB$, $\odot O$ 的直径为 8, $AB = 10$, 求 OA 的长.



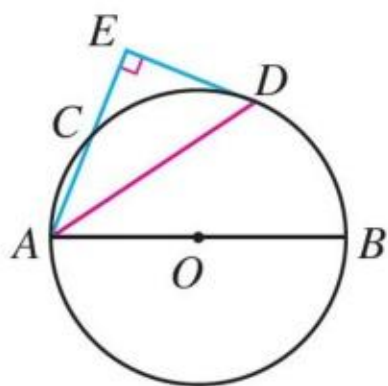
(第 2 题)



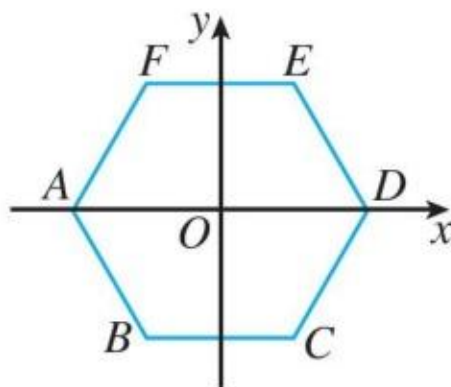
(第 3 题)

3. 如图, 菱形 $OABC$ 的顶点 A, B, C 在 $\odot O$ 上, 过点 B 作 $\odot O$ 的切线, 此切线与 OA 的延长线相交于点 D , $\odot O$ 的半径为 2, 求 BD 的长.

4. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C 是 $\odot O$ 上一点, $\angle CAB$ 的平分线与 $\odot O$ 交于点 D , 过点 D 作 $DE \perp AC$, 垂足为 E . 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线.



(第 4 题)

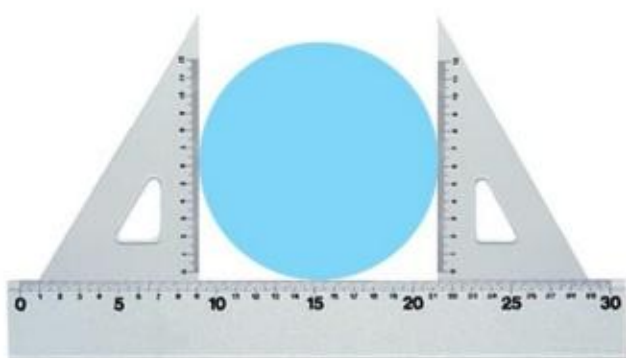


(第 5 题)

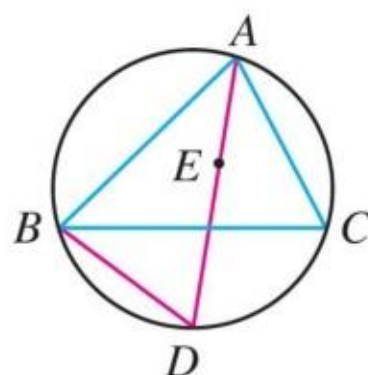
5. 如图, 正六边形 $ABCDEF$ 的中心为原点, 顶点 A, D 在 x 轴上, 半径为 2, 求其各个顶点的坐标.

综合运用

6. 如图, 利用刻度尺和三角尺可以测量圆形工件的直径, 说明其中的道理.

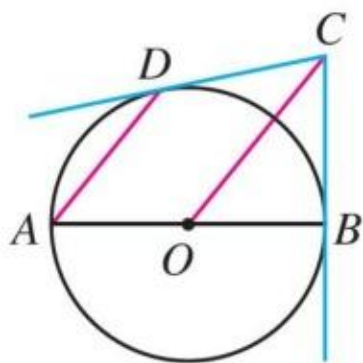


(第 6 题)

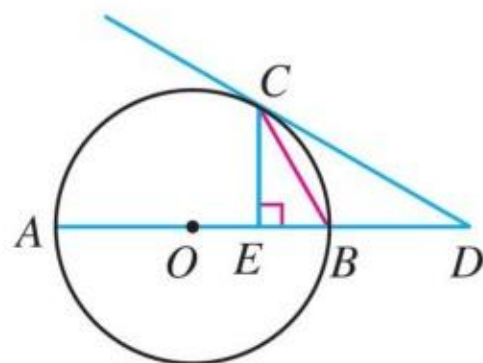


(第 7 题)

7. 如图, 点 E 是 $\triangle ABC$ 的内心, AE 的延长线和 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 D . 求证 $DE = DB$.
8. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, BC 是 $\odot O$ 的切线, 切点为 B , OC 平行于弦 AD . 求证: DC 是 $\odot O$ 的切线.



(第 8 题)

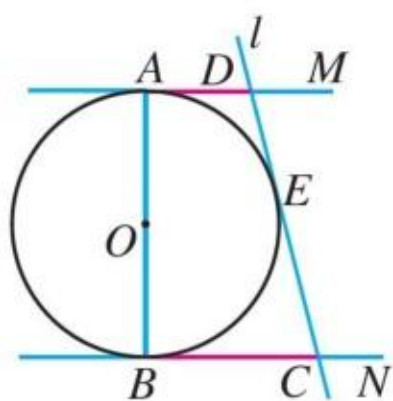


(第 9 题)

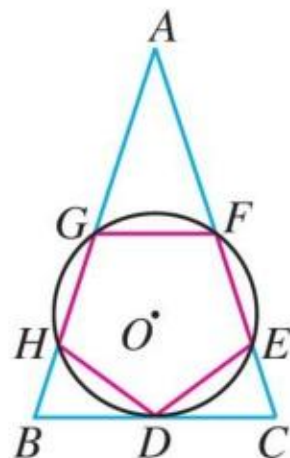
9. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C 为 $\odot O$ 上一点, 过点 C 作 $\odot O$ 的切线, 此切线与 AB 的延长线相交于点 D , $CE \perp AB$, 垂足为 E . 求证: CB 平分 $\angle DCE$.

拓广探索

10. 如图, $\odot O$ 的直径 $AB=12$, AM 和 BN 是 $\odot O$ 的两条切线. 在以点 A, B 为端点的 $\odot O$ 的右半圆弧上, 有一个动点 E , 过点 E 作 $\odot O$ 的切线 l 与 AM, BN 分别交于点 D, C . 设 $AD=x, BC=y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并画出它的图象.



(第 10 题)



(第 11 题)

11. 如图, 等腰三角形 ABC 的顶角 $\angle A=36^\circ$. $\odot O$ 和底边 BC 相切于 BC 的中点 D , 并与两腰 AC, AB 分别相交于 E, F, G, H 四点, 其中 G, F 分别是两腰 AB, AC 的中点. 求证: 五边形 $DEFGH$ 是正五边形.

综合与实践

生活中的优化问题

现实生活中，我们经常会遇到距离最短、角度最大、用料最省、成本最小、利润最大等问题。从数学角度看，它们均涉及数量的大小，这类求最大（小）值的问题常常被称为优化问题。在二次函数的学习中，我们已经学习过一些求最大（小）值的问题。接下来，我们结合一些案例，进一步研究生活中的优化问题。

活动目标

会用数学的眼光发现生活中的优化问题；会用数学知识、思想、方法描述优化问题，把优化问题转化为数学问题；会通过数学运算、逻辑推理等解决数学问题；会用数学问题的结果解释优化问题，获得优化问题的答案。

活动准备

回忆过去学习的知识内容并查阅资料，列举生活中涉及最大（小）值的优化问题。

活动任务

活动一 分析快递货车上标准包裹箱的数量

随着我国经济、社会的快速发展，快递业务实现了跨越式发展，物品寄送变得方便、快捷、安全，成为人们日常生活的重要组成部分，几乎与每个人的生活息息相关。

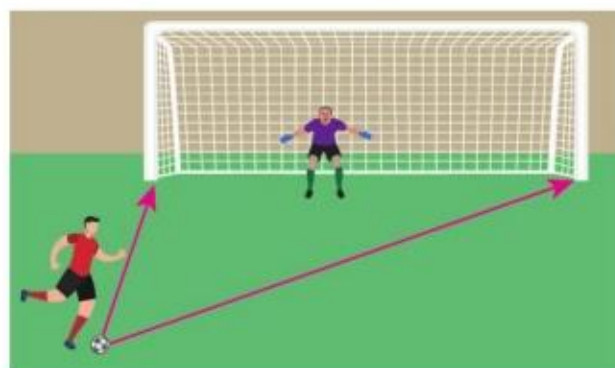
一辆快递货车穿行在 A 城、B 城之间，中间有若干集散点。在货车从 A 城驶往 B 城的过程中，每停靠一个集散点，要卸下前面各集散点发给该集散点的标准包裹箱各 1 个，同时又要装上该集散点发往以后各集散点的标准包裹箱各 1 个。

任务 1 若 A 城、B 城之间有 10 个集散点（包括 A 城、B 城），快递货车最多可装 16 个标准包裹箱，这辆货车能完成这次快递任务吗？

任务2 把任务1中的问题一般化,假设A城、B城之间有 n 个集散点(包括A城、B城),货车经过各集散点时,其装载的标准包裹箱数量如何变化?货车上至少有多少个标准包裹箱的空间才能完成快递任务?离开哪个集散点时,货车上标准包裹箱的数量最多?为什么?

活动二 寻找最大射门角度

足球场上,球员进行直线带球过程中的射门训练,射门时球员与球门两端会形成一个角度,什么时候这个射门角度最大?



我们把这个问题简化,只考虑足球沿草坪直线运动的情况.射门角度最大的问题可以简化为“直线上的点在什么位置时,其与线段两个端点的连线形成的角度最大?”的问题.

任务1 如图1,当球员带球行进的路线 l 与球门(线段 AB)所在的直线平行时,直线 l 上是否存在点 C ,使 $\angle ACB$ 最大?为什么?如果存在这样的点 C ,如何确定点 C 的位置?

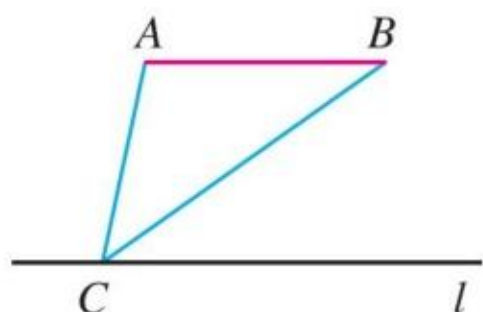


图1

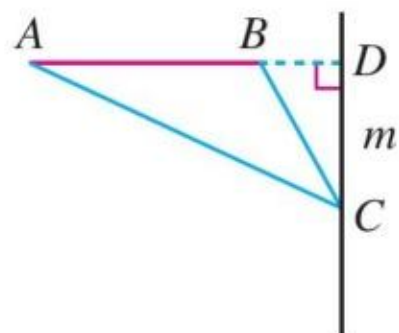


图2

任务2 如图2,当球员带球行进的路线 m 与球门所在的直线垂直时,直线 m 上是否存在点 C ,使 $\angle ACB$ 最大?为什么?如果存在这样的点 C ,如何确定点 C 的位置?

提示: 要考虑直线 m 与线段 AB 相交、与线段 AB 的延长线相交两种情形.

任务3 如图3,当球员带球行进的路线 n 与球门所在的直线相交但不垂直时,直线 n 上是否存在点 C ,使 $\angle ACB$ 最大?为什么?如果存在这样的点 C ,如何确定点 C 的位置?

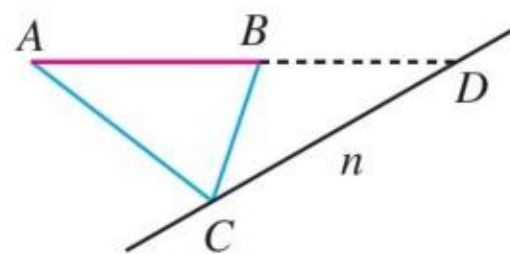


图3

提示: 与任务2类似,仍然考虑直线 n 与线段 AB 相交、与线段 AB 的延长线相交两种情形.

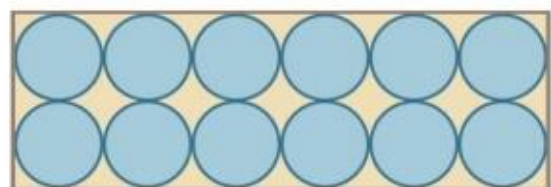
任务4 你还能提出类似上述问题的其他现实问题吗?

活动三 产品包装箱的设计

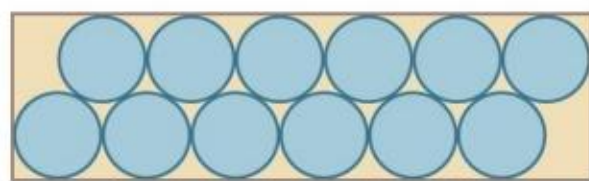
生活中，我们会见到各种各样的产品包装箱。产品包装箱的纸张浪费和垃圾等问题，开始成为社会治理的新问题。如何用更少的包装纸来包装更多的商品，对于环境保护和商家的利益来讲都是非常重要的。接下来，我们以圆柱体和长方体形状产品的包装箱为例，从数学的角度探究产品包装箱用料最小问题。

任务 1 当圆柱体产品单层排列时，研究使长方体包装箱表面积最小的排列方式。

提示：要确定圆柱体产品的长方体包装箱的表面积，在知道圆柱体的底面半径和高的情况下，主要要考虑产品的排列方式，排列方式有齐排列和错排列两种（图 4 是 12 个圆柱体产品按 2×6 的方式齐排列和错排列的底面示意图）。



齐排列



错排列

图 4

(1) 当圆柱体产品底面半径 $r=60$ mm，高 $h=123$ mm，规格为 12 个/箱时，有几种齐排列方案？分别计算它们的包装箱表面积，哪种方案的包装箱表面积最小？

(2) 对于(1)中的圆柱体产品，按照错排列的方式，有几种方案？分别计算它们的包装箱表面积，哪种方案的包装箱表面积最小？

(3) 综合比较齐排列与错排列的方式，找出最省料的包装方式。

任务 2 当圆柱体产品多层排列时，研究使长方体包装箱表面积最小的排列方式。

当圆柱体产品底面半径 $r=60$ mm，高 $h=123$ mm，规格为 12 个/箱时，有几种齐排列方案？分别计算它们的包装箱的表面积，哪种方案的包装箱表面积最小？

任务 3 类比上述解决圆柱体产品包装箱表面积最小问题的方法，研究长方体产品的包装箱表面积最小的问题。（选做。）

活动四 提出问题并解决

你还能发现并提出生活中的其他优化问题，并给予解决吗？

活动过程

1. 组建合作团队

本次综合与实践活动需要团队协作，在班级中组成 5~8 人一组的研究小组，每位同学参加其中一个小组，每个小组确定一名负责人。

2. 方案构思

小组成员进行充分的讨论与交流，集思广益，形成解决上述任务的方案。

3. 方案实施

按照小组设计的方案进行任务分工，使每位成员都有明确的任务。根据规划的研究步骤实施，完成活动任务，形成研究报告。

4. 展示交流

制作向全班汇报的演示文稿，选出代表向全班同学展示本组的研究成果，分享实践过程中的活动经验、遇到的困难及其解决方法，反思活动中的不足。

活动评价

通过成果展示与交流，基于各组完成的研究报告，根据情况选择任务完成表、表现评分表、自我反思表等进行评价。与老师和全班同学一起，通过质疑、辩论、评价，总结成果，分享体会，分析不足，开展自我评价、同学评价和教师评价，完成本次综合与实践活动。

后 记

本套教科书（七～九年级）由人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心依据教育部《义务教育数学课程标准（2022年版）》编写。

本套教科书集中反映了基础教育课程改革的最新成果，总结了上一版《义务教育教科书 数学》的编写经验，凝聚了教育专家、学科专家、教材编写人员、教研人员及一线教师的集体智慧。参加本套教科书统稿的还有薛彬、王光明，参加本册教科书统稿的还有刘金英，参加本册教科书编写讨论的还有王立东、曹自由。本套教科书封面设计由中央美术学院设计团队完成，人民教育出版社设计部制作。本册教科书版式设计为王俊宏，封面插图绘制为康鲁雷，内文插图绘制为王俊宏、张婷婷、康鲁雷。我们感谢所有对教科书的编写、审读、试教、出版等提供过帮助与支持的同仁和社会各界朋友。

本册教科书出版之前，我们通过多种渠道与教科书选用作品的作者进行了联系，得到了他们的大力支持。视觉中国、IC photo 等为本册教科书提供了图片素材。对此，我们表示衷心的感谢！

我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本册教科书的过程中提出宝贵的意见和建议。我们将本着精益求精的态度，集思广益，不断修订，努力使教科书日趋完善。

联系方式

电 话：010-58758398，58758866

电子邮箱：jcfk@pep.com.cn

意见反馈平台：jcyjfk.pep.com.cn

人民教育出版社 课程教材研究所



义务教育教科书

数学

九年级

上册

YIWU JIAOYU JIAOKESHU

SHUXUE



绿色印刷产品

ISBN 978-7-107-38924-5

