



义务教育教科书

数学

八年级
下册



人民教育出版社

人民教育出版社

义务教育教科书

数学

八年级 下册

人民教育出版社 课程教材研究所 编著

人民教育出版社
· 北京 ·

人民教育出版社

顾问：林 群 田 刚

主 编：王长平

执行主编：李海东

分册主编：张唯一

编写人员（以姓氏笔画为序）：

王红权 刘金英 刘春艳 李 庆

李海东 张艳娇 张唯一 秦德生

责任编辑：张飞玲

责任设计：王俊宏

责任校对：褚 君

责任印制：

义务教育教科书 数学 八年级 下册

人民教育出版社 课程教材研究所 编著

出 版 人民教育出版社

（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编：100081）

网 址 <http://www.pep.com.cn>

版权所有·侵权必究

致同学

亲爱的同学，新的学期开始了。在本学期的数学学习中，我们将要学习哪些内容？快来了解一下吧。

我们学习过整式和分式这两种代数式，很多实际问题中的数量关系可以用它们表示。二次根式也是代数式。在“**二次根式**”中，你将学习用二次根式表示数量关系，学习它的概念、性质和运算，提升运算能力。

对于特殊的三角形——直角三角形，我们知道它的角之间的关系，它的边之间有什么关系呢？请你到“**勾股定理**”中去探索。在探索的过程中，你会由衷地感叹数学的美妙与和谐。与三角形、等腰三角形等内容的学习类似，你还将“**四边形**”中探索并证明一般四边形，以及平行四边形、矩形、菱形、正方形等特殊四边形的性质。通过学习这些内容，增强几何直观，提升推理能力。

我们生活在变化的世界中，函数将给你提供描述变化的一种数学工具。在“**函数**”中，通过分析实际问题中的变量关系，你将初步形成函数的概念，学会用式子、图象、表格表示函数，并利用它解决非常广泛的问题。在各种各样的函数中，一次函数是最基本的。在“**一次函数**”中，你将学习它的概念、图象和性质，并用它解决实际问题，提升抽象能力，增强模型观念。

数据是信息的载体，有效地提取数据中蕴含的信息有助于我们更好地了解周围的世界。在“**数据的分析**”中，你将学习用数值描述数据特征的方法分析数据，进一步体会用样本估计总体的思想，从而对数据的作用有更深刻的认识，增强数据观念。

此外，在综合与实践“**音乐与数学**”将带你了解音乐中的数学知识，认识音乐与数学的关系；“**学生体质健康调查与分析**”将请你调查并分析体质健康检测的数据，体会数学的应用价值。

数学伴随着我们成长，数学伴随着我们进步，数学伴随着我们成功。让我们扬帆起航，开启一段新的数学之旅吧！

目 录

第十九章 二次根式 1



19.1 二次根式及其性质 2

19.2 二次根式的乘法与除法 6

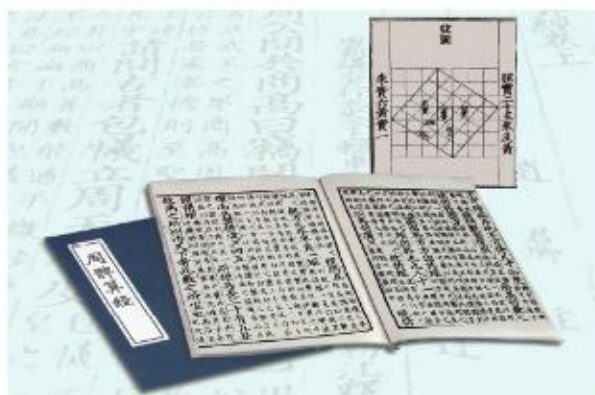
19.3 二次根式的加法与减法 13

阅读与思考 海伦-秦九韶公式 17

数学活动 18

小结 19

第二十章 勾股定理 22



20.1 勾股定理及其应用 23

阅读与思考 勾股定理的证明 32

20.2 勾股定理的逆定理及其应用 34

图说数学史 数学瑰宝——勾股定理 39

数学活动 41

小结 42

第二十一章 四边形 45



21.1 四边形及多边形 46

探究与发现 用多边形镶嵌平面 54

21.2 平行四边形 55

21.3 特殊的平行四边形 68

探究与发现 利用菱形的性质和判定尺规作图 82

数学活动 83

小结 85

第二十二章 函数 89



22.1 函数的概念 90

图说数学史 函数概念的探索之路 98

22.2 函数的表示 100

数学活动 110

小结 111

第二十三章 一次函数 113



23.1 一次函数的概念 114

23.2 一次函数的图象和性质 117

信息技术应用 探究函数的图象和性质 125

23.3 一次函数与方程(组)、不等式 127

23.4 实际问题与一次函数 131

数学活动 138

小结 139

综合与实践 音乐与数学 143

第二十四章 数据的分析 148



24.1 数据的集中趋势 149

信息技术应用 利用统计软件求统计量 166

24.2 数据的离散程度 168

24.3 数据的四分位数 176

24.4 数据的分组 182

阅读与思考 大数据及其应用 186

数学活动 188

小结 189

综合与实践 学生体质健康调查与分析 193

第十九章 二次根式

广播电视塔越高，从塔顶发射出的电磁波就传播得越远，从而能收听、收看到广播电视节目的区域就越广. 那么，广播电视塔高 h (单位: km) 增加到一定的倍数，广播电视节目信号的传播半径 r (单位: km) 是否也会增加到相应的倍数呢?

实际上，广播电视塔高 h 与广播电视节目信号的传播半径 r 之间存在近似关系 $r = \sqrt{2Rh}$ ，其中 R 是地球半径， $R \approx 6\,400$ km. 如果两个广播电视塔的高分别是 h_1 km, h_2 km, 那么它们的传播半径之比是 $\frac{\sqrt{2Rh_1}}{\sqrt{2Rh_2}}$. 与以往学过的整式和分式不同，这个式子中含有根号，如何化简这个式子呢?

解决上面的问题需要二次根式的有关知识. 本章我们将在已学的算术平方根的基础上，类比整式、分式，学习二次根式的概念、性质和运算法则. 本章的学习将为后面的勾股定理、一元二次方程等内容的学习打下基础.



19.1 二次根式及其性质

整式和分式都可以表示一些问题中的数量和数量关系. 在学习了算术平方根的概念后, 我们还可以用含有根号的式子表示数量和数量关系. 例如, 本章引言中广播电视节目信号的传播半径 r 可以表示为 $\sqrt{2Rh}$.

再来看一些例子.

思考

用含有根号的式子填空, 看一看写出的结果有什么共同特征:

(1) 一个长方形的围栏, 长是宽的 2 倍, 面积为 130 m^2 , 则它的宽为 _____ m.

(2) 一个大正方形的面积是一个边长为 a 的正方形与另一个边长为 1 的正方形的面积之和, 则大正方形的边长为 _____.

(3) 一个物体从高处自由落下, 落到地面所用的时间 t (单位: s) 与开始落下时离地面的高度 h (单位: m) 的关系近似为 $h=5t^2$. 如果用含有 h 的式子表示 t , 那么 t 为 _____.

上面问题的结果分别是 $\sqrt{65}$, $\sqrt{a^2+1}$, $\sqrt{\frac{h}{5}}$,

它们表示一些正数的算术平方根. 一般地, 我们把形如 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 的式子叫作 **二次根式** (quadratic radical). 二次根式是代数式.

在二次根式 $\sqrt{a}$ 中, 为什么 a 不能是负数?

例 1 当 x 满足什么条件时, $\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义?

解: 由 $x-2 \geq 0$, 得

$$x \geq 2.$$

当 $x \geq 2$ 时, $\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义.

思考

当 x 满足什么条件时, $\sqrt{x^2}$ 在实数范围内有意义? $\sqrt{x^3}$ 呢?

练习

1. 要画一个面积为 18 cm^2 的长方形, 使它的长与宽之比为 $3:2$, 它的长、宽各应取多少?
2. 当 a 满足什么条件时, 下列各式在实数范围内有意义?
 (1) $\sqrt{a-1}$; (2) $\sqrt{5-a}$; (3) $\sqrt{2a^2+1}$.
3. 当 $a=5$ 时, $\sqrt{\frac{a-1}{2}}$ 的值是_____.

下面研究二次根式的性质.

我们知道, 当 $a>0$ 时, $\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根, 因此 $\sqrt{a}>0$; 当 $a=0$ 时, $\sqrt{a}$ 表示 0 的算术平方根, 因此 $\sqrt{a}=0$. 这就是说,

$$\sqrt{a} \geq 0 \quad (a \geq 0).$$

探究

根据算术平方根的意义填空:

$$(\sqrt{3})^2 = \underline{\quad}; \quad (\sqrt{0.5})^2 = \underline{\quad}; \quad \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = \underline{\quad}; \quad (\sqrt{0})^2 = \underline{\quad}.$$

$\sqrt{3}$ 是 3 的算术平方根, 根据算术平方根的意义, $\sqrt{3}$ 是一个平方等于 3 的非负数. 因此, $(\sqrt{3})^2=3$.

同理, $\sqrt{0.5}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{0}$ 分别是 0.5 , $\frac{1}{3}$, 0 的算术平方根. 因此, $(\sqrt{0.5})^2=0.5$, $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2=\frac{1}{3}$, $(\sqrt{0})^2=0$.

一般地,

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geq 0).$$

例 2 计算:

$$(1) (\sqrt{1.5})^2; \quad (2) (2\sqrt{5})^2.$$

解: (1) $(\sqrt{1.5})^2 = 1.5$;

$$(2) (2\sqrt{5})^2 = 2^2 \times (\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20.$$

例 2 (2) 中 $2\sqrt{5}$ 表示 $2 \times \sqrt{5}$, 本题用到了 $(ab)^2 = a^2 b^2$ 这个性质.

探究

填空:

$$\sqrt{2^2} = \underline{\quad\quad}; \quad \sqrt{0.1^2} = \underline{\quad\quad}; \quad \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \underline{\quad\quad}; \quad \sqrt{0^2} = \underline{\quad\quad}.$$

根据算术平方根的意义, 可以得到

$$\sqrt{2^2} = 2; \quad \sqrt{0.1^2} = 0.1; \quad \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}; \quad \sqrt{0^2} = 0.$$

一般地,

$$\sqrt{a^2} = a \quad (a \geq 0).$$

思考

当 a 为任意实数时, $\sqrt{a^2}$ 都有意义. 如果上式中的 a 为负实数, 那么上式还成立吗? 为什么?

例 3 化简:

$$(1) \sqrt{16}; \quad (2) \sqrt{(-5)^2}.$$

$$\text{解: } (1) \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4; \quad (2) \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{5^2} = 5.$$

练习

1. 计算:

$$(1) (\sqrt{3})^2; \quad (2) (3\sqrt{2})^2.$$

2. 化简:

$$(1) \sqrt{0.3^2}; \quad (2) \sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^2}; \quad (3) -\sqrt{(-\pi)^2}; \quad (4) \sqrt{10^{-2}}.$$

习题 19.1



复习巩固

1. 当 a 满足什么条件时, 下列各式在实数范围内有意义?

(1) $\sqrt{a+2}$; (2) $\sqrt{3-a}$; (3) $\sqrt{5a^2}$; (4) $\sqrt{2a+1}$.

2. 计算:

(1) $(\sqrt{5})^2$; (2) $(-\sqrt{0.2})^2$; (3) $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2$; (4) $(5\sqrt{5})^2$;

(5) $\left(-7\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2$; (6) $\sqrt{(-10)^2}$; (7) $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$; (8) $-\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2}$.

3. 用代数式表示:

(1) 面积为 S 的圆的半径;

(2) 面积为 S 且两条邻边的比为 $1:2$ 的长方形的两邻边长.

4. 利用 $a = (\sqrt{a})^2$ ($a \geq 0$), 把下列非负数分别写成一个非负数的平方的形式:

(1) 5; (2) 2.5; (3) $\frac{1}{2}$; (4) 0.

综合运用

5. 已知一个大圆的面积是两个小圆的面积之和. 如果大圆的半径为 r , 两个小圆的半径分别为 2 和 3, 求 r 的值.

6. $\triangle ABC$ 的面积为 12, AB 边上的高是 AB 边长的 4 倍. 求 AB 的长.

7. 当 x 满足什么条件时, 下列各式在实数范围内有意义?

(1) $\sqrt{x^2+1}$; (2) $\sqrt{(x-1)^2}$; (3) $\sqrt{\frac{1}{x}}$; (4) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

8. 小球从离地面为 h (单位: m) 的高处自由下落, 落到地面所用的时间为 t (单位: s). 经过实验, 发现 h 与 t^2 成正比例关系, 而且当 $h=20$ 时, $t=2$. 试用含 h 的代数式表示 t , 并分别求当 $h=10$ 和 $h=25$ 时, 小球落地所用的时间.

拓广探索

9. (1) 已知 $\sqrt{18-n}$ 是整数, 求自然数 n 所有可能的值;

(2) 已知 $\sqrt{24n}$ 是整数, 求正整数 n 的最小值.

10. 一个圆柱的高为 10, 体积为 V . 求它的底面半径 r (用含 V 的代数式表示), 并分别求当 $V=10\pi$ 和 20π 时, 底面半径 r 的大小.

19.2 二次根式的乘法与除法

类比整式、分式，我们学习了二次根式的概念，接下来也要学习二次根式的运算. 根据算术平方根的意义，当 a 取某个非负实数时， $\sqrt{a}$ 也是一个实数，我们从这类实数的运算出发学习二次根式的运算.

先来研究二次根式的乘法.

探究

计算下列各式，观察计算结果，你能发现什么规律？

$$(1) \sqrt{4} \times \sqrt{9} = \underline{\hspace{2cm}}, \sqrt{4 \times 9} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \sqrt{16} \times \sqrt{25} = \underline{\hspace{2cm}}, \sqrt{16 \times 25} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \sqrt{36} \times \sqrt{49} = \underline{\hspace{2cm}}, \sqrt{36 \times 49} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

一般地，二次根式的乘法法则是

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geq 0, b \geq 0).$$

例 1 计算：

$$(1) \sqrt{3} \times \sqrt{5}; \quad (2) \sqrt{\frac{1}{3}} \times \sqrt{27}; \quad (3) \sqrt{\frac{2}{5}} \times \sqrt{\frac{5}{8}}.$$

解： (1) $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15};$

$$(2) \sqrt{\frac{1}{3}} \times \sqrt{27} = \sqrt{\frac{1}{3} \times 27} = \sqrt{9} = 3;$$

$$(3) \sqrt{\frac{2}{5}} \times \sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{2}{5} \times \frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

把 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$ 反过来，就得到

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0),$$

利用它可以进行二次根式的化简.

例 2 化简:

(1) $\sqrt{16 \times 81}$; (2) $\sqrt{4a^2b^3}$ ❶.

解: (1) $\sqrt{16 \times 81} = \sqrt{16} \times \sqrt{81} = 4 \times 9 = 36$;

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \sqrt{4a^2b^3} &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^3} \\
 &= 2 \cdot a \cdot \sqrt{b^2 \cdot b} \\
 &= 2a \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{b} \\
 &= 2ab\sqrt{b}.
 \end{aligned}$$

被开方数 $4a^2b^3$ 含有偶数次因数 4 ($4=2^2$) 和因式 a^2, b^2 , 它们是开得尽平方的因数和因式, 被开方后可以移到根号外.

例 3 计算:

(1) $\sqrt{14} \times \sqrt{7}$; (2) $3\sqrt{5} \times 2\sqrt{10}$; (3) $\sqrt{3x} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}xy}$.

解: (1) $\sqrt{14} \times \sqrt{7} = \sqrt{14 \times 7} = \sqrt{7^2 \times 2} = \sqrt{7^2} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$;

$$\begin{aligned}
 (2) \quad 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{10} &= 3 \times 2 \times \sqrt{5 \times 10} = 6\sqrt{5^2 \times 2} \\
 &= 6\sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = 6 \times 5\sqrt{2} \\
 &= 30\sqrt{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \sqrt{3x} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}xy} &= \sqrt{3x \cdot \frac{1}{3}xy} = \sqrt{x^2y} \\
 &= \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} \\
 &= x\sqrt{y}.
 \end{aligned}$$

练习

1. 计算:

(1) $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$; (2) $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$; (3) $2\sqrt{6} \times \sqrt{\frac{1}{2}}$; (4) $\sqrt{288} \times \sqrt{\frac{1}{72}}$.

2. 化简:

(1) $\sqrt{49 \times 81}$; (2) $\sqrt{4y}$; (3) $\sqrt{16ab^2c^3}$.

3. 一个长方形的长和宽分别是 $\sqrt{10}$ 和 $2\sqrt{2}$, 求这个长方形的面积.

❶ 在本章中, 如果没有特别说明, 所有的字母都表示正数; 根号下含有字母的二次根式的运算都是选学内容.

再来研究二次根式的除法.

探究

计算下列各式, 观察计算结果, 你能发现什么规律?

$$(1) \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \underline{\hspace{1cm}}, \sqrt{\frac{4}{9}} = \underline{\hspace{1cm}}; \quad (2) \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \underline{\hspace{1cm}}, \sqrt{\frac{16}{25}} = \underline{\hspace{1cm}};$$

$$(3) \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \underline{\hspace{1cm}}, \sqrt{\frac{36}{49}} = \underline{\hspace{1cm}}.$$

一般地, 二次根式的除法法则是

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geqslant 0, b > 0).$$

例 4 计算:

$$(1) \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}; \quad (2) \sqrt{\frac{3}{2}} \div \sqrt{\frac{1}{18}}.$$

解: (1) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{24}{3}} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2};$

$$(2) \sqrt{\frac{3}{2}} \div \sqrt{\frac{1}{18}} = \sqrt{\frac{3}{2} \div \frac{1}{18}} = \sqrt{\frac{3}{2} \times 18} = \sqrt{3 \times 9} = 3\sqrt{3}.$$

把 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geqslant 0, b > 0)$ 反过来, 就得到

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geqslant 0, b > 0),$$

利用它可以进行二次根式的化简.

例 5 化简:

$$(1) \sqrt{\frac{3}{100}}; \quad (2) \sqrt{\frac{y^3}{x^2}}.$$

解: (1) $\sqrt{\frac{3}{100}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{3}}{10};$ (2) $\sqrt{\frac{y^3}{x^2}} = \frac{\sqrt{y^3}}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{y^2} \cdot \sqrt{y}}{x} = \frac{y\sqrt{y}}{x}.$

例 6 设长方形的面积为 S ，相邻两边长分别为 a ， b 。已知 $S=\sqrt{10}$ ， $b=\sqrt{3}$ ，求 a 。

解：因为 $S=ab$ ，所以

$$a = \frac{S}{b} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{10}{3}} = \sqrt{\frac{10 \times 3}{3 \times 3}} = \sqrt{\frac{30}{3^2}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{30}}{3}.$$

二次根式化简的结果中被开方数不含分母。

练习

1. 计算：

$$(1) \sqrt{18} \div \sqrt{2}; \quad (2) \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}; \quad (3) \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{20}}; \quad (4) \sqrt{\frac{b}{5}} \div \sqrt{\frac{b}{20a^2}}.$$

2. 化简：

$$(1) \sqrt{\frac{7}{36}}; \quad (2) \sqrt{\frac{64}{9}}; \quad (3) \sqrt{\frac{16b}{25a^2}}.$$

3. 计算：

$$(1) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}; \quad (2) \sqrt{2a} \div \sqrt{6a}.$$

例 4、例 5、例 6 中各小题的最后结果是 $2\sqrt{2}$ ， $3\sqrt{3}$ ， $\frac{\sqrt{3}}{10}$ ， $\frac{y\sqrt{y}}{x}$ ， $\frac{\sqrt{30}}{3}$ ，观察这些式子中的二次根式，可以发现它们有如下两个特点：

- (1) 被开方数不含分母；
- (2) 被开方数中不含能开得尽平方的因数或因式。

我们把满足上述两个条件的二次根式，叫作**最简二次根式**。

在二次根式的运算中，一般要把最后结果化简，使其中的二次根式为最简二次根式，并且分母中不含二次根式。

例 7 计算：

$$(1) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}; \quad (2) \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}}; \quad (3) \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2a}}.$$

解：(1) 解法 1: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3 \times 5}{5 \times 5}} = \sqrt{\frac{15}{5^2}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$

解法 2: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}} &= \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3^2 \times 3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3^2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2a}} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2a}}{\sqrt{2a} \cdot \sqrt{2a}} = \frac{4\sqrt{a}}{2a} = \frac{2\sqrt{a}}{a}.$$

在解法 2 中, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} =$

$\frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$, 这样变形是为

了使分母中不含二次根式.

现在来看本章引言中的问题.

如果两个广播电视塔的高分别是 h_1 km, h_2 km, 那么它们的传播半径之比是 $\frac{\sqrt{2Rh_1}}{\sqrt{2Rh_2}}$. 这个式子还可以化简:

$$\frac{\sqrt{2Rh_1}}{\sqrt{2Rh_2}} = \frac{\sqrt{2R} \cdot \sqrt{h_1}}{\sqrt{2R} \cdot \sqrt{h_2}} = \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_2}} = \frac{\sqrt{h_1} \cdot \sqrt{h_2}}{\sqrt{h_2} \cdot \sqrt{h_2}} = \frac{\sqrt{h_1 h_2}}{h_2}.$$

可以看出, 这个比与地球半径无关. 这样, 只要知道 h_1, h_2 , 就可以求出比值.

由此你能回答本章引言中开始提出的问题吗?

练习

1. 化简, 使结果中的二次根式为最简二次根式:

(1) $\sqrt{32}$;

(2) $\sqrt{40}$;

(3) $\sqrt{24 \times 75}$;

(4) $\sqrt{1.5}$;

(5) $\sqrt{\frac{4}{3}}$;

(6) $\sqrt{\frac{16b^2c}{a^2}}$.

2. 计算:

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;

(2) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$;

(3) $\frac{5n}{3\sqrt{n}}$;

(4) $\frac{2xy}{\sqrt{2x}}$.

3. 一个长方体的体积 $V=4\sqrt{3}$, 高 $h=3\sqrt{2}$, 求它的底面积 S .

习题 19.2

复习巩固

1. 计算:

(1) $\sqrt{24} \times \sqrt{27}$;

(2) $\sqrt{6} \times (-\sqrt{15})$;

(3) $\sqrt{18} \times \sqrt{20} \times \sqrt{75}$;

(4) $\sqrt{42} \times \sqrt{\frac{3}{7}}$.

2. 计算:

(1) $\sqrt{18} \div \sqrt{8}$;

(2) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$;

(3) $\sqrt{\frac{1}{2}} \div \sqrt{\frac{2}{5}}$;

(4) $\frac{\sqrt{4x^2y}}{\sqrt{9xy}}$.

3. 化简:

(1) $\sqrt{4 \times 49}$;

(2) $\sqrt{300}$;

(3) $\sqrt{\frac{25}{36}}$;

(4) $\sqrt{\frac{a^2b}{4c^2}}$.

4. 计算:

(1) $\frac{\sqrt{12}}{2}$;

(2) $\frac{3}{\sqrt{6}}$;

(3) $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{40}}$;

(4) $\frac{-\sqrt{45y^2}}{3\sqrt{5y}}$.

5. 根据下列条件求代数式 $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 的值:

(1) $a=1, b=10, c=-15$;

(2) $a=2, b=-8, c=5$.

综合运用

6. 设正方形的面积为 S , 边长为 a .

(1) 已知 $S=75$, 求 a ;

(2) 已知 $S=162$, 求 a .

7. 计算:

(1) $\sqrt{0.4} \times \sqrt{3.6}$;

(2) $\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{27}{8}}$;

(3) $\sqrt{27} \times \sqrt{50} \div \sqrt{6}$;

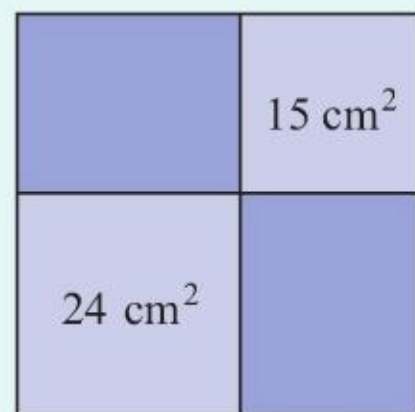
(4) $\frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{40}} \times \sqrt{5}$.

8. 已知 $\sqrt{2} \approx 1.414$, 求 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 与 $\sqrt{8}$ 的近似值 (结果保留小数点后两位).9. 设长方形的面积为 S , 相邻两边长分别为 a, b . 已知 $S=4\sqrt{3}$, $a=\sqrt{15}$, 求 b .10. 一个三角形的面积 $S=2\sqrt{6}$, 底边 a 上的高 $h=\sqrt{2}$, 求它的底边 a 的长.

11. 声音在空气中传播的速度 v (单位: m/s) 可以根据公式 $v=331\sqrt{1+\frac{t}{273}}$ 计算, 其中 t (单位: $^{\circ}\text{C}$) 表示空气温度. 当 t 为 27°C 时, 求声音的传播速度 (结果取整数).

拓广探索

12. 如图, 从一个大正方形纸片中裁去面积分别为 15 cm^2 和 24 cm^2 的两个小正方形, 求剩下部分的面积.



(第 12 题)

13. 用计算器计算:

- (1) $\sqrt{9 \times 9 + 19}$;
- (2) $\sqrt{99 \times 99 + 199}$;
- (3) $\sqrt{999 \times 999 + 1\,999}$;
- (4) $\sqrt{9\,999 \times 9\,999 + 19\,999}$.

观察上面几题的结果, 你能发现什么规律? 用你发现的规律直接写出下题的结果:

$$\sqrt{\underbrace{99 \cdots 9}_{100 \text{ 个 } 9} \times \underbrace{99 \cdots 9}_{100 \text{ 个 } 9} + \underbrace{199 \cdots 9}_{100 \text{ 个 } 9}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

19.3 二次根式的加法与减法

前面我们学习了二次根式的乘法与除法运算，接下来研究怎样进行二次根式的加法与减法运算.

 思考

如何计算 $\sqrt{27} + \sqrt{12}$?

$\sqrt{27}$ 与 $\sqrt{12}$ 的被开方数不同，无法直接相加. 如果 $\sqrt{27}$ 与 $\sqrt{12}$ 能化成被开方数相同的形式，那么就可以类比整式运算中的合并同类项进行运算. 因此，先把 $\sqrt{27}$ ， $\sqrt{12}$ 分别化简成 $3\sqrt{3}$ ， $2\sqrt{3}$ ，然后利用分配律将 $3\sqrt{3}$ 和 $2\sqrt{3}$ 合并，即

$$\begin{aligned}\sqrt{27} + \sqrt{12} &= 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} && \text{(化简)} \\ &= (3+2)\sqrt{3} && \text{(利用分配律合并)} \\ &= 5\sqrt{3}.\end{aligned}$$

一般地，**二次根式加减时，先将二次根式化简，再将被开方数相同的二次根式合并.**

例 1 计算：

$$(1) \sqrt{80} - \sqrt{45}; \quad (2) \sqrt{9a} + \sqrt{25a}; \quad (3) 2\sqrt{12} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} + 3\sqrt{48}.$$

解：(1) $\sqrt{80} - \sqrt{45} = 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = \sqrt{5}$;

(2) $\sqrt{9a} + \sqrt{25a} = 3\sqrt{a} + 5\sqrt{a} = 8\sqrt{a}$;

(3) $2\sqrt{12} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} + 3\sqrt{48} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = 14\sqrt{3}.$

比较二次根式的加减与整式的加减，你能得出什么结论？

例 2 计算：

$$(1) \sqrt{12} + \sqrt{20} + 2(\sqrt{3} - \sqrt{5}); \quad (2) \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - \frac{3}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{27}).$$

解：(1) $\sqrt{12} + \sqrt{20} + 2(\sqrt{3} - \sqrt{5}) = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{5} = 4\sqrt{3}$;

$$\begin{aligned}(2) \quad \frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})-\frac{3}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{27}) &= \frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{2}+\frac{9}{4}\sqrt{3} \\ &= \frac{11}{4}\sqrt{3}-\frac{5}{4}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

例3 有一块长为 7.5 dm、宽为 5 dm 的木板，能否采用如图 19.3-1 的方式，在这块木板上截出两个面积分别是 8 dm^2 和 18 dm^2 的正方形木板？

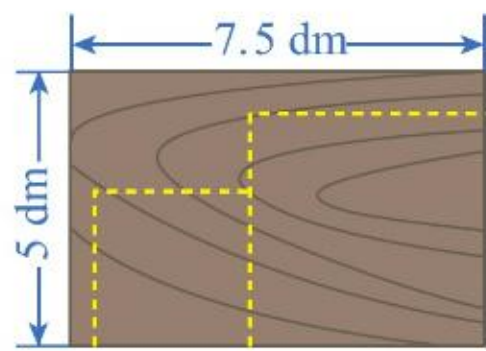


图 19.3-1

分析：由图 19.3-1 可以看出，只要木板的宽大于大正方形木板的边长，木板的长大于两个正方形木板的边长的和，就能截出所要求的两个正方形木板。

解：大正方形木板的边长为 $\sqrt{18} \text{ dm}$ 。因为 $\sqrt{18} < 5$ ，所以这块木板够宽。

两个正方形木板的边长的和为 $(\sqrt{8} + \sqrt{18}) \text{ dm}$ ，而

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (2+3)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

由 $\sqrt{2} < 1.5$ 可知 $5\sqrt{2} < 7.5$ ，即两个正方形木板的边长的和小于这块木板的长，所以这块木板够长。

因此，可以用这块木板按要求截出两个面积分别是 8 dm^2 和 18 dm^2 的正方形木板。

练习

1. 下列计算是否正确？为什么？

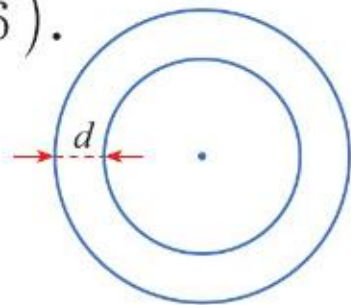
(1) $\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{4+9}$; (2) $\sqrt{8} - \sqrt{3} = \sqrt{8-3}$; (3) $3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

2. 计算：

(1) $2\sqrt{7} - 6\sqrt{7}$; (2) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - 3\sqrt{\frac{1}{3}}$;

(3) $\sqrt{18} + (\sqrt{98} - \sqrt{27})$; (4) $(\sqrt{24} + \sqrt{0.5}) - (\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{6})$.

3. 如图，两个圆的圆心相同，它们的面积分别是 62.8 和 141.3。求圆环的宽度 d (π 取 3.14)。



(第 3 题)

在二次根式的混合运算中，整式的乘法法则和乘法公式仍然适用.

例 4 计算：

$$(1) (\sqrt{8} + \sqrt{3}) \times \sqrt{6}; \quad (2) (4\sqrt{2} - 3\sqrt{6}) \div 2\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解：} (1) (\sqrt{8} + \sqrt{3}) \times \sqrt{6} &= \sqrt{8} \times \sqrt{6} + \sqrt{3} \times \sqrt{6} \\ &= \sqrt{8 \times 6} + \sqrt{3 \times 6} \\ &= 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (4\sqrt{2} - 3\sqrt{6}) \div 2\sqrt{2} &= (4\sqrt{2} - 3\sqrt{6}) \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &= 4\sqrt{2} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} - 3\sqrt{6} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &= 2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

例 4 运用了分配律.

例 5 计算：

$$(1) (\sqrt{2} + 3)(\sqrt{2} - 5); \quad (2) (\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}).$$

$$\begin{aligned} \text{解：} (1) (\sqrt{2} + 3)(\sqrt{2} - 5) &= (\sqrt{2})^2 - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 15 \\ &= 2 - 2\sqrt{2} - 15 \\ &= -13 - 2\sqrt{2}; \\ (2) (\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) &= (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 \\ &= 5 - 3 \\ &= 2. \end{aligned}$$

例 5 (1) 运用了多项式乘多项式的法则，(2) 运用了平方差公式.

练习

1. 计算：

$$\begin{aligned} (1) \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5}); & \quad (2) (\sqrt{80} + \sqrt{40}) \div \sqrt{5}; \\ (3) (\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} + 2); & \quad (4) (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

2. 计算：

$$\begin{aligned} (1) (4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7}); & \quad (2) (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}); \\ (3) (\sqrt{3} + 2)^2; & \quad (4) (2\sqrt{5} - \sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

习题 19.3

复习巩固

1. 计算:

$$(1) 2\sqrt{12} + \sqrt{27};$$

$$(2) \sqrt{18} - \sqrt{\frac{9}{2}};$$

$$(3) \frac{2}{3}\sqrt{9x} + 6\sqrt{\frac{x}{4}};$$

$$(4) a^2\sqrt{8a} + 3a\sqrt{50a^3}.$$

2. 计算:

$$(1) \sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{2};$$

$$(2) \sqrt{75} - \sqrt{54} + \sqrt{96} - \sqrt{108};$$

$$(3) (\sqrt{45} + \sqrt{18}) - (\sqrt{8} - \sqrt{125});$$

$$(4) \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \frac{3}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{27}).$$

3. 计算:

$$(1) (\sqrt{12} + 5\sqrt{8}) \times \sqrt{3};$$

$$(2) (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2});$$

$$(3) (5\sqrt{3} + 2\sqrt{5})^2;$$

$$(4) \left(\sqrt{48} + \frac{1}{4}\sqrt{6}\right) \div \sqrt{27}.$$

综合运用

4. 已知 $\sqrt{5} \approx 2.236$, 求 $5\sqrt{\frac{1}{5}} - \frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}} + \sqrt{45}$ 的近似值 (结果保留小数点后两位).

5. 已知 $x = \sqrt{3} + 1$, $y = \sqrt{3} - 1$, 求下列各式的值:

$$(1) x^2 + 2xy + y^2;$$

$$(2) x^2 - y^2.$$

6. 已知边长分别为 $(\sqrt{5} + \sqrt{2})$ m, $(\sqrt{5} - \sqrt{2})$ m 的两个正方形的面积分别为 S_1, S_2 .

(1) 求 $S_1 + S_2$ 的值;

(2) 用一根长为 20 m 的铁丝, 能否围成这两个正方形?

拓广探索

7. 已知 $a + \frac{1}{a} = \sqrt{10}$, 求 $a - \frac{1}{a}$ 的值. (提示: 利用 $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2$ 与 $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2$ 之间的关系.)

8. 在下列各方程后面的括号内分别给出了一组数, 从中找出方程的解:

$$(1) 2x^2 - 6 = 0, (\sqrt{3}, \sqrt{6}, -\sqrt{3}, -\sqrt{6});$$

$$(2) 2(x+5)^2 = 24, (5+2\sqrt{3}, 5-2\sqrt{3}, -5+2\sqrt{3}, -5-2\sqrt{3}).$$

阅读与思考

海伦-秦九韶公式

利用公式 $S = \frac{1}{2}ah$ 求三角形的面积，需要先知道一条边及这条边上的高，再利用公式计算. 能否直接通过三角形的边求面积呢？由三角形全等的判定方法“边边边”可知，一个三角形只要三边确定，这个三角形的形状和大小就完全确定了. 这意味着，通过三角形的三边是可以确定三角形的面积的. 那么，如何由三角形的三边求三角形的面积呢？

古希腊的几何学家海伦（Heron，约 1 世纪），在他的著作《度量论》中，给出了利用三角形的三边求面积的公式

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad ①$$

其中 $p = \frac{a+b+c}{2}$. 我们把公式①称为海伦公式.

我国南宋时期的数学家秦九韶，在他的著作《数书九章》中，也曾提出利用三角形的三边求面积的公式

$$S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2} \right)^2 \right]}. \quad ②$$

我们把公式②称为秦九韶公式.

下面我们对公式②进行变形：

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2} \right)^2 \right]} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}ab \right)^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{4} \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}ab + \frac{a^2+b^2-c^2}{4} \right) \left(\frac{1}{2}ab - \frac{a^2+b^2-c^2}{4} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{4} \cdot \frac{c^2 - (a-b)^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}} \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

这说明海伦公式与秦九韶公式实质上是同一个公式，因此我们也称公式①为海伦-秦九韶公式.



秦九韶（约 1202—约 1261）

数学活动

活动 纸张规格的奥秘

书籍和纸张的长与宽都有固定的规格，表 1 和表 2 给出了两种常用纸张的规格（单位： $\text{mm} \times \text{mm}$ ）：

表 1

A 型	宽 $\times$ 长
A5	148×210
A4	210×297
A3	297×420
A2	420×594
A1	594×841

表 2

B 型	宽 $\times$ 长
B5	182×257
B4	257×364
B3	364×515
B2	515×728
B1	$728 \times 1\,030$

(1) 使用计算器求出各规格纸张长与宽的比值，你有什么发现？各规格纸张的长与宽的比有什么关系？测量教科书与课外读物的长与宽，看一看它们的长与宽的比是否也有类似确定的关系。

(2) 如图 1，长方形纸片 $ABCD$ 的长与宽的比值为 $\sqrt{2}$ 。

① 如图 2，若 E, F 分别是长边 AD, BC 的中点，将纸片 $ABCD$ 沿直线 EF 对折，得到的长方形 $ABFE$ 是否仍为“长与宽的比值为 $\sqrt{2}$ 的长方形”？为什么？

② 若按图 3 所示的方式折叠纸片 $ABCD$ ，长方形 $GHID$ 是否仍为“长与宽的比值为 $\sqrt{2}$ 的长方形”？为什么？

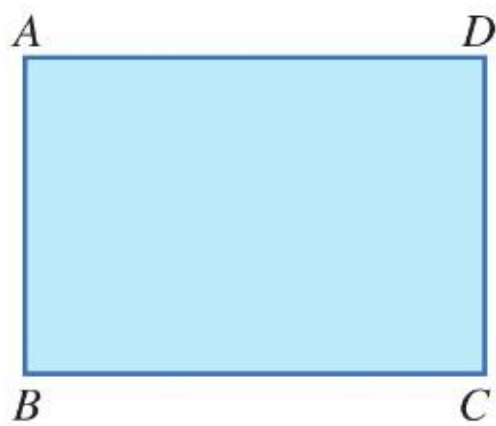


图 1

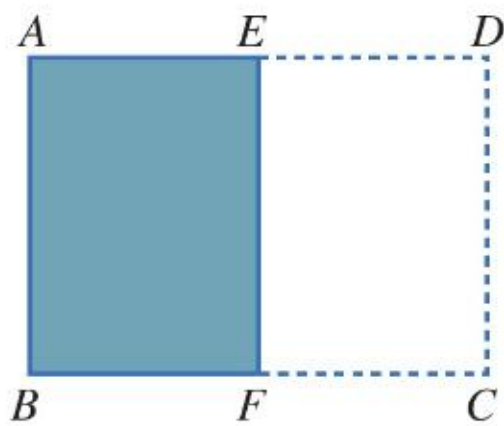


图 2

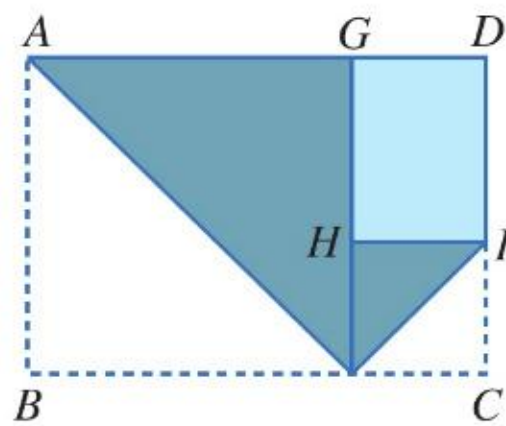
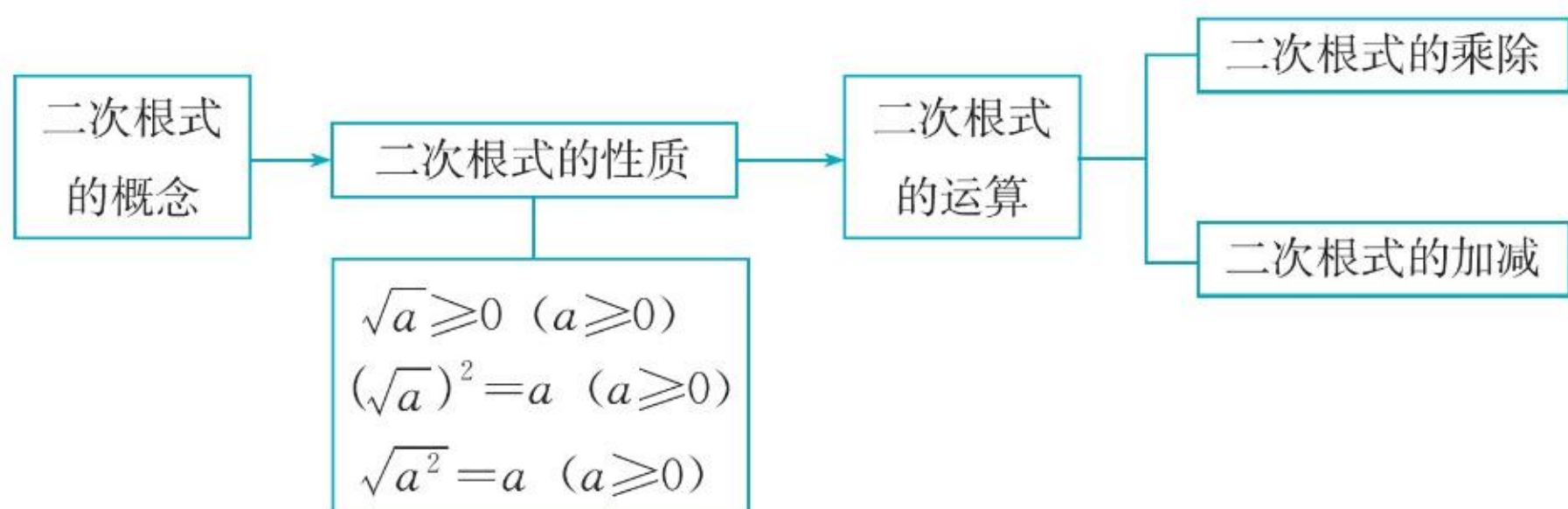


图 3

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章我们类比整式、分式，在算术平方根的基础上，学习了二次根式的概念、性质和运算. 当 a 取某个非负数时，二次根式 $\sqrt{a}$ 就是这个非负数的算术平方根. 由算术平方根的意义可以得出二次根式的性质，进而研究二次根式的运算.

在二次根式的运算中，每个二次根式就像一个指数幂一样参与运算，因此整式的运算法则对于二次根式也适用. 二次根式的乘除就是把被开方数乘除，再开平方；利用二次根式的乘除法法则，还可以化简二次根式. 二次根式的加减与整式的加减类似，只要将二次根式化简后，合并被开方数相同的二次根式就可以了. 二次根式的混合运算，就像整式的混合运算那样进行，运算中可以用整式的乘除法法则，也可以运用乘法公式. 通过二次根式的学习，我们的运算能力和推理能力得到了进一步提升.

至此，我们已经学习了整式、分式、二次根式等代数式的概念、性质和运算. 代数式中的字母表示数，代数式的运算也就是含有字母的算式的运算，实际上就是用有理数的运算法则和运算律对这些符号进行运算.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 当 x 满足什么条件时， $\sqrt{x}$ 在实数范围内有意义？
2. 什么叫最简二次根式？你能举出一些最简二次根式的例子吗？

3. 请你分别举例说明二次根式的加、减、乘、除运算法则.

4. 回顾整式、分式、二次根式等代数式的学习内容和学习方法,你有什么体会?



复习题 19

复习巩固

1. 当 x 满足什么条件时, 下列各式在实数范围内有意义?

$$(1) \sqrt{3+x}; \quad (2) \frac{1}{\sqrt{2x-1}}; \quad (3) \sqrt{\frac{1}{2-3x}}; \quad (4) \sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}}.$$

2. 化简:

$$(1) \sqrt{500}; \quad (2) \sqrt{12x}; \quad (3) \sqrt{\frac{14}{3}};$$

$$(4) \sqrt{\frac{2}{3a^2}}; \quad (5) \sqrt{2x^2y^3}; \quad (6) \sqrt{\frac{5a^5}{6}}.$$

3. 计算:

$$(1) \left(\sqrt{24} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) - \left(\sqrt{54} + \sqrt{\frac{1}{8}} \right);$$

$$(2) 2\sqrt{12} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \div 5\sqrt{2};$$

$$(3) (2\sqrt{3} + \sqrt{6})(2\sqrt{3} - \sqrt{6});$$

$$(4) (2\sqrt{48} - 3\sqrt{27}) \div \sqrt{6};$$

$$(5) (2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^2;$$

$$(6) \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{5}{4}} \right)^2.$$

4. 正方形的边长为 a , 它的面积与一个长为 96、宽为 12 的长方形的面积相等. 求 a .

综合运用

5. 已知 $x = \sqrt{5} - 1$, 求代数式 $x^2 + 5x - 6$ 的值.

6. 已知 $x = 2 - \sqrt{3}$, 求代数式 $(7 + 4\sqrt{3})x^2 + (2 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$ 的值.

7. 一列按如下顺序排列的数:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots,$$

从第 3 个数开始, 后一个数是其前两个数的和, 这列数称为斐波那契数列. 斐波

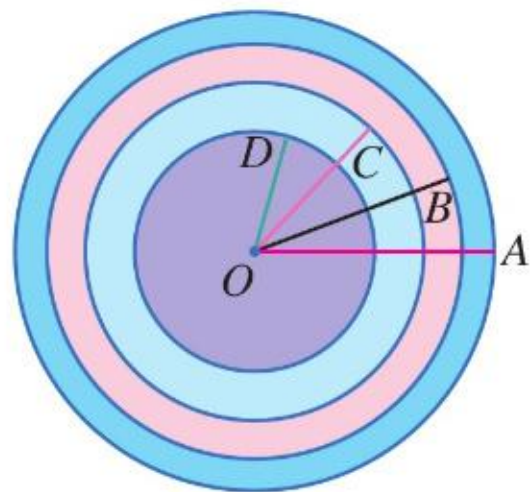
那契数列的第 n 个数可以表示为 $\frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$, 请你用这个式子

验算斐波那契数列的第 1 个数和第 2 个数是否都是 1.

8. 电流通过导线时会产生热量, 电流 I (单位: A)、导线电阻 R (单位: Ω)、通电时间 t (单位: s) 与产生的热量 Q (单位: J) 满足 $Q = I^2 R t$. 已知导线的电阻为 5Ω , 1 s 时间导线产生 30 J 的热量, 求电流 I 的值 (结果保留小数点后两位).

拓广探索

9. 已知 n 是正整数, $\sqrt{189n}$ 是整数, 求 n 的最小值.
10. (1) 把一个圆的面积四等分. 你能想出几种分割方法?
- (2) 如图, 以点 O 为圆心的三个同心圆把以 OA 为半径的大圆 O 的面积四等分. 若 $OA = r$, 求这三个圆的半径 OB , OC , OD 的长.
11. 判断下列各式是否成立:



(第 10 (2) 题)

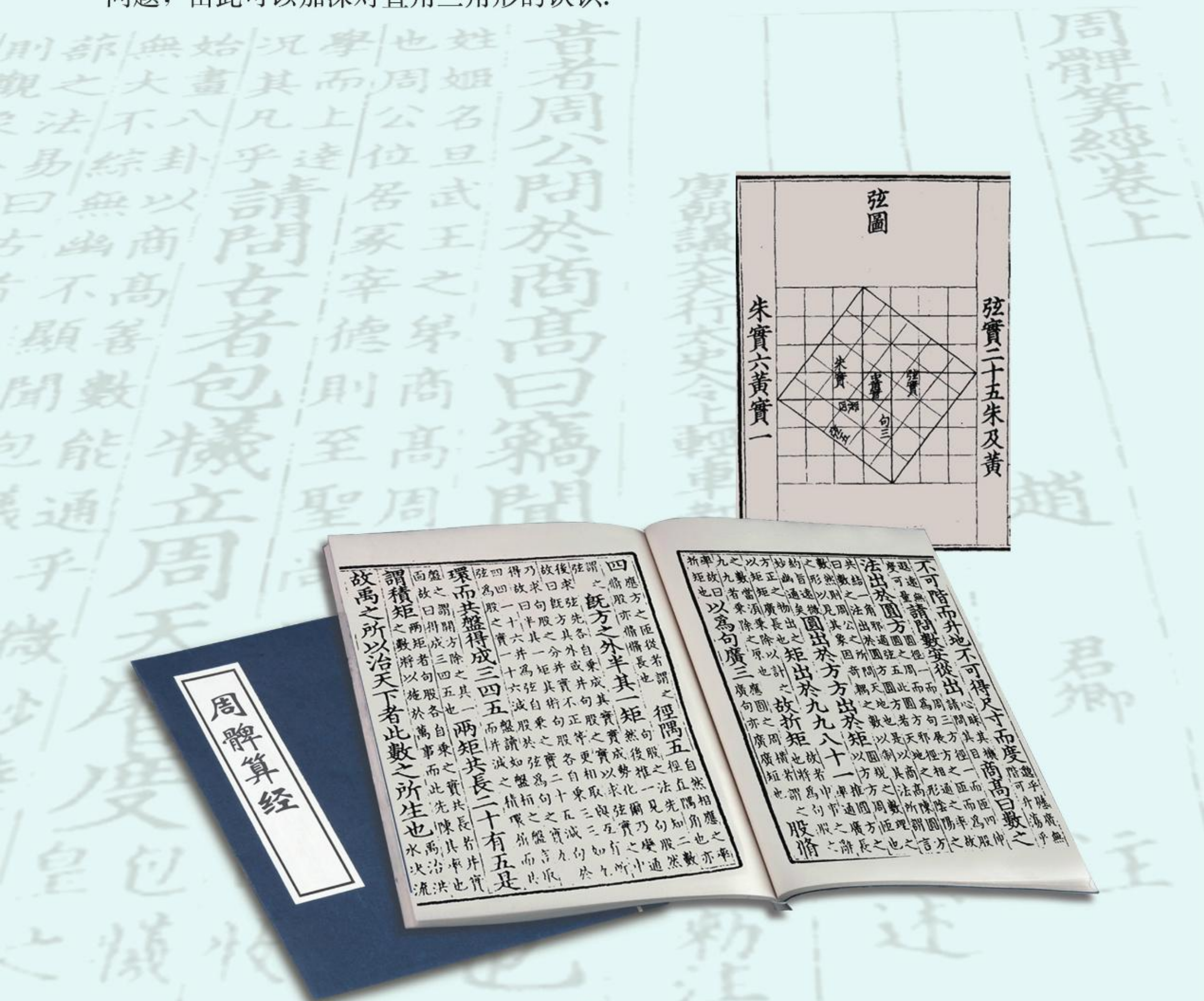
$$\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}; \sqrt{4\frac{4}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}}.$$

如果成立, 你能看出其中的规律吗? 用字母表示这一规律, 并给出证明.

第二十章 勾股定理

直角三角形是一种特殊的三角形，具有广泛的应用价值，人们对其研究也由来已久。在我国古代，人们将直角三角形中短的直角边叫作勾，长的直角边叫作股，斜边叫作弦。根据我国数学典籍《周髀算经》记载，在约公元前11世纪，人们就知道，如果勾为三、股为四，那么弦为五。后来人们进一步发现并证明了直角三角形三边之间的数量关系——两条直角边长的平方和等于斜边长的平方，这就是勾股定理。

本章我们将探索并证明勾股定理及其逆定理，并运用这两个定理解决有关问题，由此可以加深对直角三角形的认识。



20.1 勾股定理及其应用

直角三角形作为一种特殊的三角形，它的三个角满足其中一个角是直角、其余两个角互余. 对于直角三角形的三条边，它们之间有什么特殊关系呢？

在《周髀算经》的开篇，商高（约公元前 11 世纪）构造了一个勾、股、弦分别为三、四、五的直角三角形，并指出“两矩共长二十有五”，意指分别以勾、股为边的正方形的面积之和，恰好等于以弦为边的正方形的面积.

商高所指的面积关系可以用图形表示. 如图 20.1-1，红色直角三角形的三边长分别为 3，4，5，分别以这三边为边向外作正方形，所得正方形的面积分别为 9，16，25，且 $9+16=25$. 从边的角度看，这个直角三角形的三边满足：两条直角边长的平方和等于斜边长的平方.

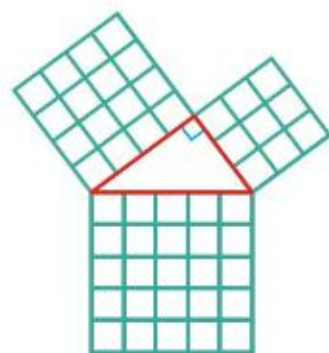


图 20.1-1

其他直角三角形的三边是否也满足上述数量关系？

探究

如图 20.1-2，每个小方格的面积均为 1，图中正方形 A_1 ， B_1 ， C_1 的面积之间有什么关系？ A_2 ， B_2 ， C_2 呢？ A_3 ， B_3 ， C_3 呢？

以格点为顶点，在方格纸中任意画一个直角三角形，类似地作出三个正方形，这三个正方形的面积有什么关系？由此，你能得出关于直角三角形三边关系的猜想吗？

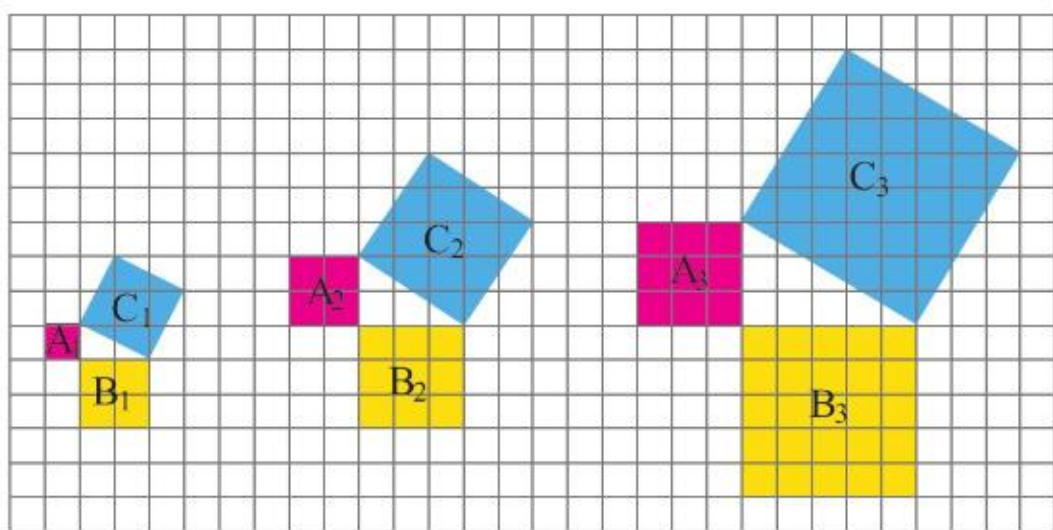


图 20.1-2

以直角三角形斜边为边的正方形的面积，等于某个正方形的面积减去 4 个直角三角形的面积.

可以发现，以直角三角形两条直角边为边的正方形的面积之和，等于以斜边为边的正方形的面积。由此我们猜想（图 20.1-3）：

如果直角三角形的两条直角边长分别为 a ， b ，斜边长为 c ，那么 $a^2 + b^2 = c^2$ 。

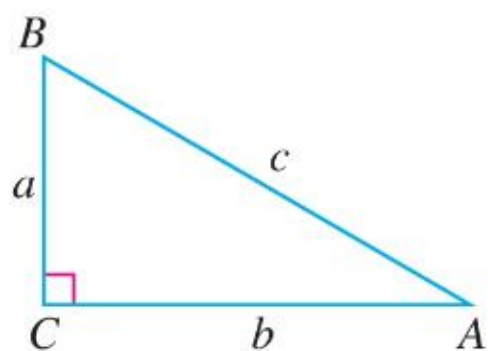


图 20.1-3

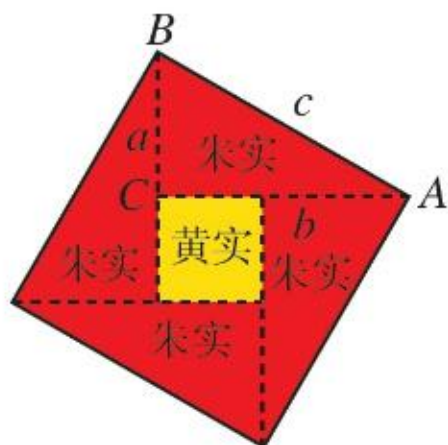


图 20.1-4

证明这个猜想的方法有很多，下面介绍我国古代数学家赵爽（约 3 世纪）的证法。

如图 20.1-4，这个图案是赵爽在注解《周髀算经》时给出的，人们称它为“赵爽弦图”。赵爽根据此图指出，四个全等的直角三角形（红色）可以围成一个大正方形，中空的部分是一个小正方形（黄色）。

赵爽指出：按弦图，又可以勾股相乘为朱实二，倍之为朱实四。以勾股之差自相乘为中黄实。加差实，亦成弦实。

赵爽利用弦图证明这个猜想的基本思路如下：如图 20.1-5(1)，把边长分别为 a ， b 的两个正方形连在一起，它的面积是 $a^2 + b^2$ 。这两个正方形还可以分割成四个全等的直角三角形（红色）和一个正方形（黄色），把图 20.1-5(1) 中左、右两个三角形移到图 20.1-5(2) 中所示的位置，就会形成一个以 c 为边长的正方形（图 20.1-5(3)），它的面积是 c^2 。因为图 20.1-5(1) 与图 20.1-5(3) 都由四个全等的直角三角形（红色）和一个正方形（黄色）组成，所以它们的面积相等，即 $a^2 + b^2 = c^2$ 。

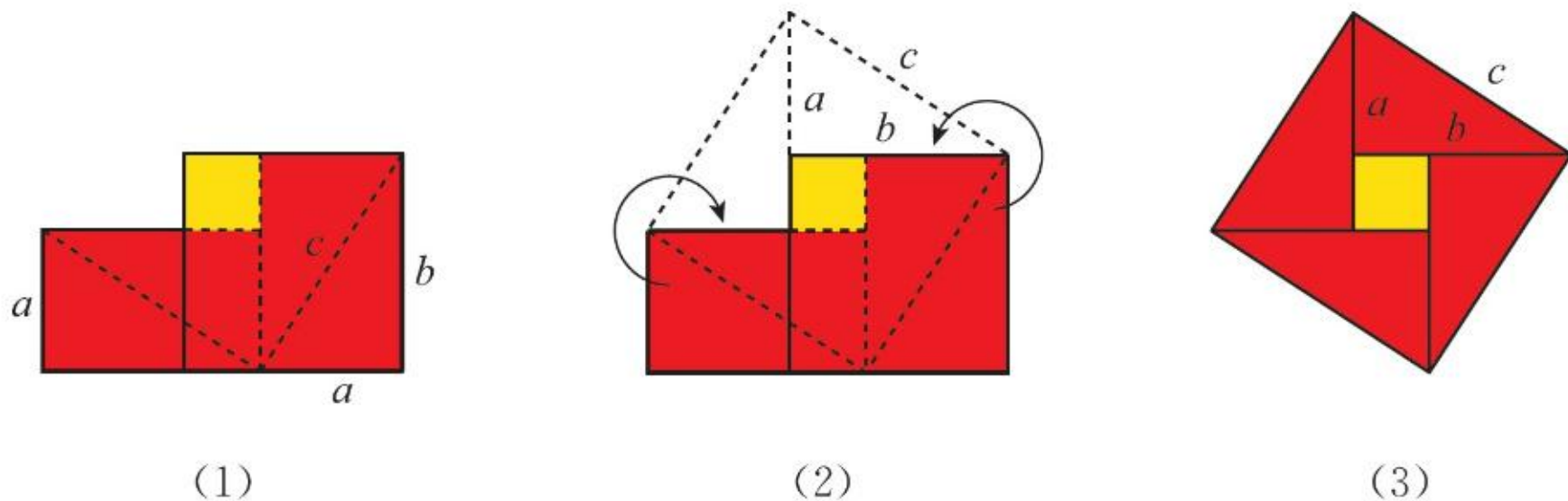


图 20.1-5

这样就证明了前面的猜想. 它表明了直角三角形三边之间的关系, 我国把它称为**勾股定理**.

赵爽通过对图形的分割、拼接, 巧妙地利用面积关系证明了勾股定理, 这种方法是我国古代数学家常用的“出入相补法”. “赵爽弦图”体现了我国古人的聪明才智和对数学的钻研精神, 是我国古代数学的骄傲. 2002 年在北京召开的国际数学家大会的会标, 就是以此图为原型设计的(图 20.1-6).

在西方, 人们称勾股定理为毕达哥拉斯定理.

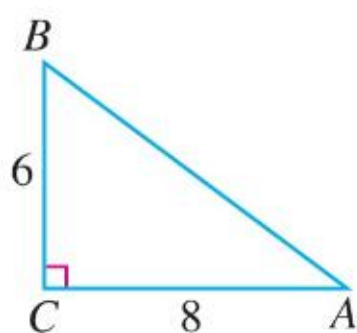


图 20.1-6

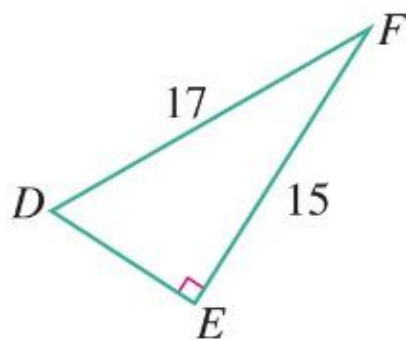
探究

根据“赵爽弦图”(图 20.1-4), 你能通过计算弦图的面积推导出勾股定理吗?

例 1 如图 20.1-7, 根据所给条件分别求两个直角三角形中未知边的长.



(1)



(2)

图 20.1-7

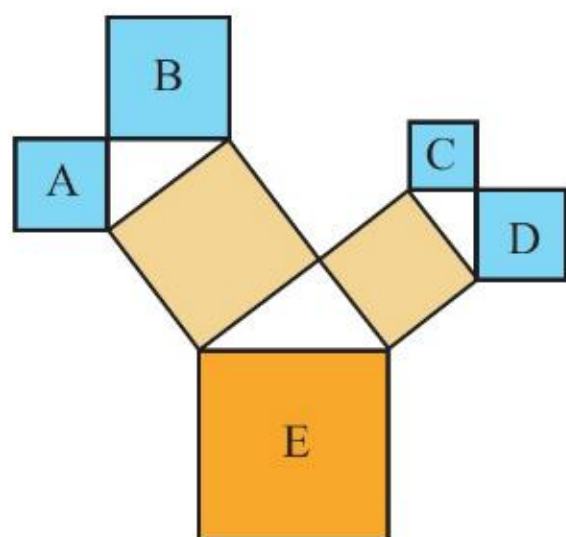
解: (1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 根据勾股定理, $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, 所以 $AB = 10$.

(2) 在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中, 根据勾股定理, $DE^2 + EF^2 = DF^2$, 从而 $DE^2 = DF^2 - EF^2 = 17^2 - 15^2 = 64$, 所以 $DE = 8$.

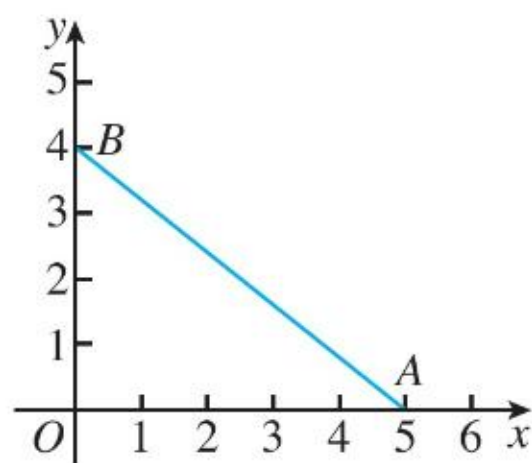
练习

- 设直角三角形的两条直角边长分别为 a 和 b , 斜边长为 c .
 - 已知 $a = 6$, $c = 10$, 求 b ;
 - 已知 $a = 5$, $b = 12$, 求 c ;
 - 已知 $b = 15$, $c = 25$, 求 a .

2. 如图, 图中所有的三角形都是直角三角形, 四边形都是正方形. 已知正方形 A, B, C, D 的边长分别是 12, 16, 9, 12, 求最大正方形 E 的面积.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图, 在平面直角坐标系中有两点 $A(5, 0)$ 和 $B(0, 4)$. 求这两点间的距离.

勾股定理有广泛的应用, 下面我们用它解决两个问题.

例 2 一个门框的尺寸如图 20.1-8 所示, 一块长 3 m, 宽 2.2 m 的长方形薄木板能否从门框内通过? 为什么?

分析: 可以看出, 木板横着或竖着都不能从门框内通过, 只能试试斜着能否通过. 门框对角线 AC 的长度是木板斜着能通过的最大长度. 求出 AC, 再与木板的宽比较, 就能知道木板能否通过.

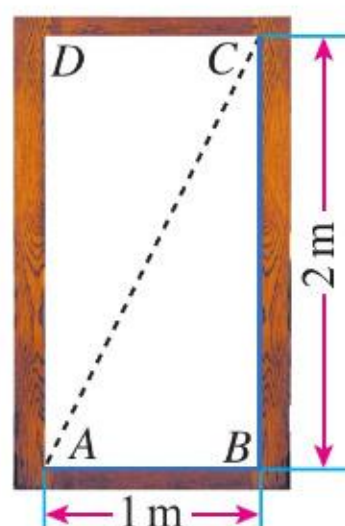


图 20.1-8

解: 连接 AC, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 根据勾股定理,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 2^2 = 5,$$

$$AC = \sqrt{5} \approx 2.24.$$

因为 AC 大于木板的宽 2.2 m, 所以木板能从门框内通过.

例 3 如图 20.1-9, 一架长为 2.5 m 的梯子斜靠在竖直的墙上, 此时梯子一边的顶端位于墙面的点 A 处, 底端位于地面的点 B 处, 点 B 到墙面的距离 BO 为 0.7 m. 如果将梯子底端沿 OB 向外移动 0.8 m, 那么梯子顶端也沿

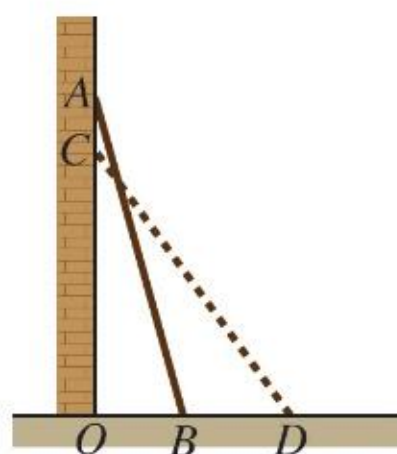


图 20.1-9

墙 AO 下滑 0.8 m 吗?

解: 当梯子底端沿 OB 向外移动 0.8 m 时, 设梯子的底端由点 B 移动到点 D , 顶端由点 A 下滑到点 C . 可以看出, $AC=OA-OC$.

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, 根据勾股定理,

$$OA^2=AB^2-OB^2=2.5^2-0.7^2=5.76,$$

$$OA=2.4.$$

在 $\text{Rt}\triangle COD$ 中, 根据勾股定理,

$$OC^2=CD^2-OD^2=2.5^2-(0.7+0.8)^2=4,$$

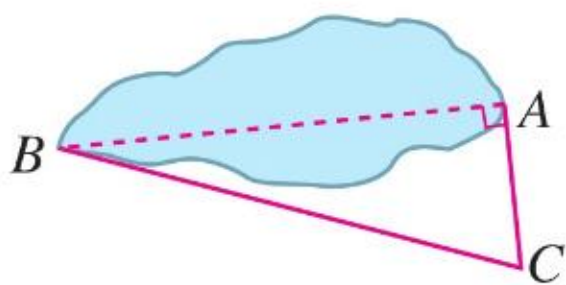
$$OC=2.$$

$$\text{所以, } AC=OA-OC=2.4-2=0.4.$$

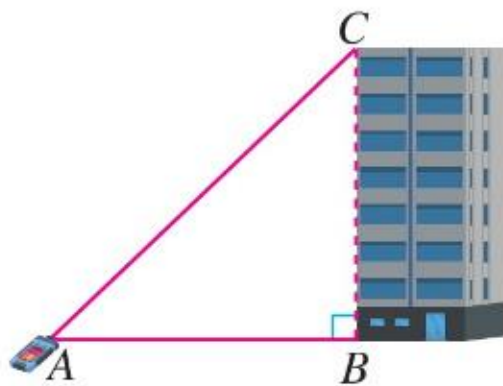
因此, 当梯子底端向外移动 0.8 m 时, 梯子顶端并不是下滑 0.8 m , 而是下滑 0.4 m .

练习

- 如图, A, B 是池塘边上的两点, C 是与 BA 方向成直角的方向上一点, 测得 $BC=60\text{ m}$, $AC=20\text{ m}$. 求 A, B 两点间的距离 (结果取整数).



(第 1 题)



(第 2 题)

- 如图, 用激光测距仪测量一栋楼的高度. 位于地面上点 A 处的激光测距仪先将激光射向楼底端的点 B , 仪器显示 $AB=23.1\text{ m}$; 再将激光射向楼顶端的点 C , 仪器显示 $AC=31.9\text{ m}$; 最后仪器自动显示出楼高 $BC=22\text{ m}$. 你能说出其中的数学道理吗?
- 电视机的屏幕尺寸是指其屏幕对角线的长度, 通常以英寸 ($1\text{ 英寸}=2.54\text{ cm}$) 为单位. 王芳测得自家电视机的屏幕宽为 71 cm , 高为 40 cm , 这台电视机的屏幕尺寸是多少英寸 (结果取整数)?

思考

在八年级上册中，我们曾经通过探究得出结论：斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等. 学习了勾股定理后，你能证明这一结论吗？

先画出图形，再写出已知、求证如下：

已知：如图 20.1-10，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$ 中， $\angle C = \angle C' = 90^\circ$ ， $AB = A'B'$ ， $AC = A'C'$.

求证： $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

证明：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$ 中， $\angle C = \angle C' = 90^\circ$ ，根据勾股定理，

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}, B'C' = \sqrt{A'B'^2 - A'C'^2}.$$

又 $AB = A'B'$ ， $AC = A'C'$ ，

$$\therefore BC = B'C'.$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \text{ (SSS)}.$$

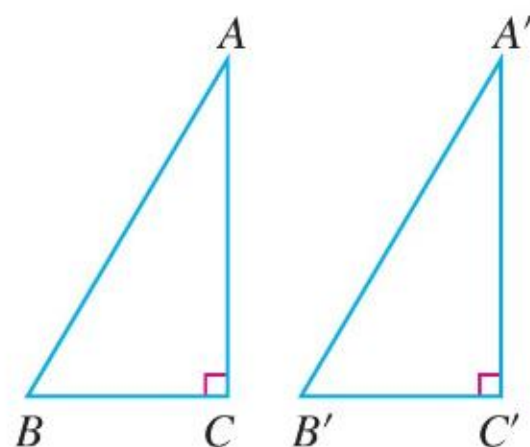


图 20.1-10

探究

我们知道，任何一个实数都可以用数轴上的一个点表示，你能在数轴上画出表示 $\sqrt{13}$ 的点吗？

如果能画出长为 $\sqrt{13}$ 的线段，就能在数轴上画出表示 $\sqrt{13}$ 的点. 我们知道，长为 $\sqrt{2}$ 的线段是两条直角边的长都为 1 的直角三角形的斜边. 长为 $\sqrt{13}$ 的线段能是两条直角边的长都为正整数的直角三角形的斜边吗？

由勾股定理可知，两条直角边的长分别为 2, 3 的直角三角形，其斜边长为 $\sqrt{13}$. 由此，可以依照如下方法在数轴上画出表示 $\sqrt{13}$ 的点.

如图 20.1-11，O 为数轴原点，首先在数轴上找出表示 3 的点 A，则 $OA = 3$. 然后过点 A 作直线 l 垂直于 OA，在 l 上取点 B，使 $AB = 2$. 最后以原点 O 为圆心，OB 长为半径作弧，弧与数轴正半轴的交点 C 即为表示 $\sqrt{13}$ 的点.

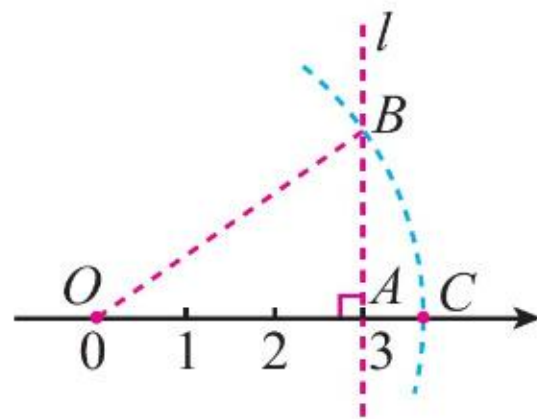


图 20.1-11

类似地, 利用勾股定理, 可以画出长为 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\dots$ 的线段 (图 20.1-12). 按照相同的方法, 还可以在数轴上画出表示 $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\dots$ 的点 (图 20.1-13).

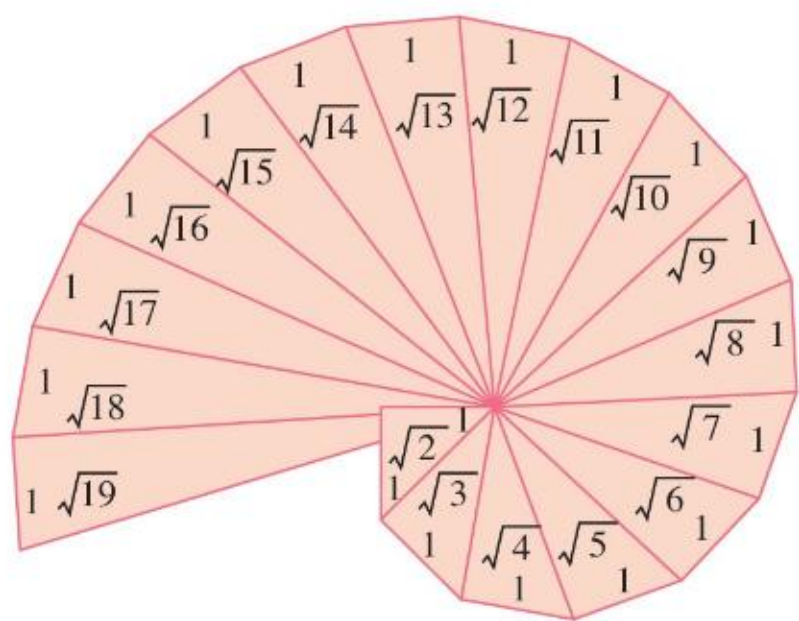


图 20.1-12

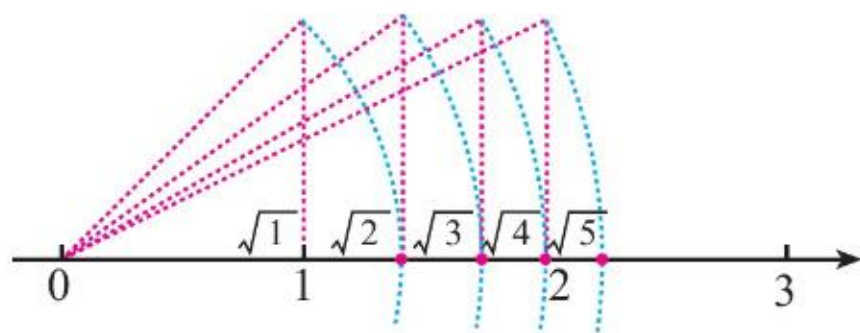
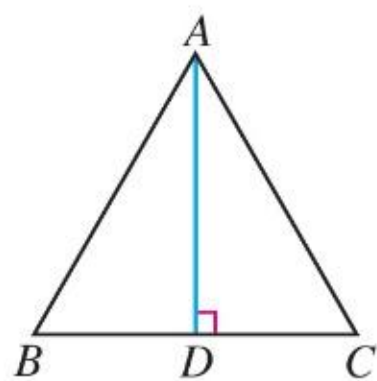


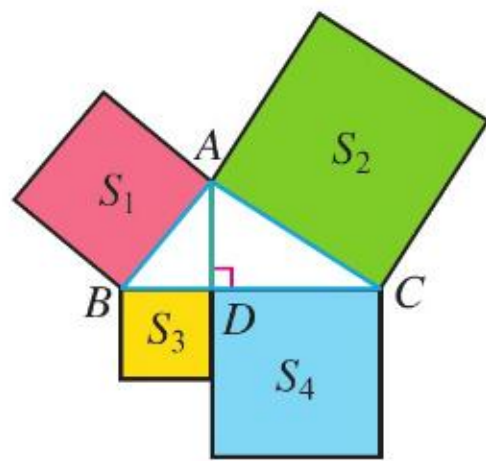
图 20.1-13

练习

1. 在数轴上画出表示 $\sqrt{17}$ 的点.
2. 如图, 等边三角形 ABC 的边长为 6, 求:
 - (1) 高 AD ;
 - (2) 等边三角形 ABC 的面积.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的高. 分别以线段 AB , AC , BD , CD 为边向外作正方形, 正方形的面积分别为 S_1 , S_2 , S_3 , S_4 . 请写出关于 S_1 , S_2 , S_3 , S_4 的等式.

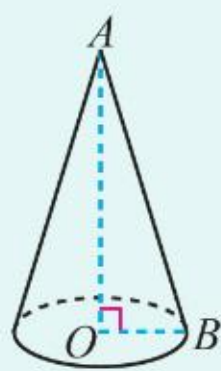
习题 20.1

复习巩固

- 设直角三角形的两条直角边长分别为 a 和 b ，斜边长为 c .
 - 已知 $a=12$, $b=5$, 求 c ;
 - 已知 $a=3$, $c=4$, 求 b ;
 - 已知 $c=10$, $b=9$, 求 a .
- 如图, 一根直立于地面的木杆在离地面 3 m 处折断, 木杆顶端落在离木杆底端 4 m 处. 木杆折断之前有多高?

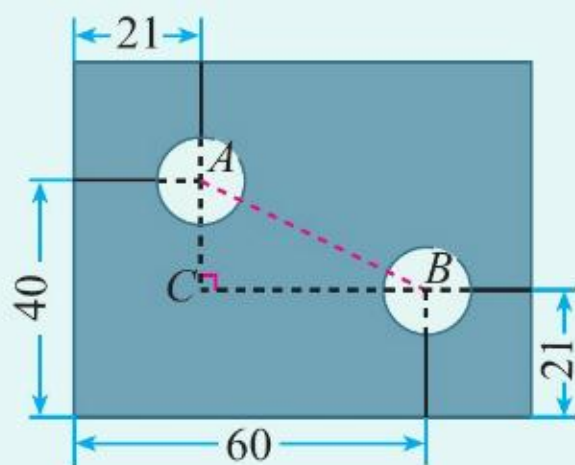


(第 2 题)

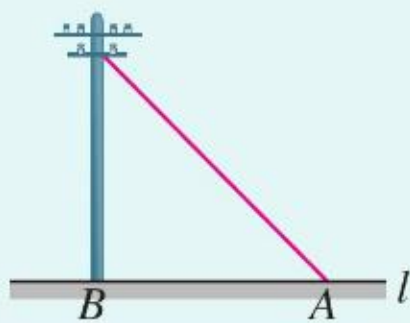


(第 3 题)

- 如图, 一个圆锥的高 $AO=2.4$, 底面半径 $OB=0.7$. AB 的长是多少?
- 一个含两小圆孔的长方形零件尺寸 (单位: mm) 如图所示, 求两孔中心的距离 (结果保留小数点后一位).



(第 4 题)



(第 5 题)

- 如图, 要从电线杆离地面 5 m 处向地面拉一条长为 7 m 的钢缆. 求地面上钢缆的固定点 A 到电线杆底部点 B 的距离 (结果保留小数点后一位).
- 在数轴上画出表示 $\sqrt{20}$ 的点.

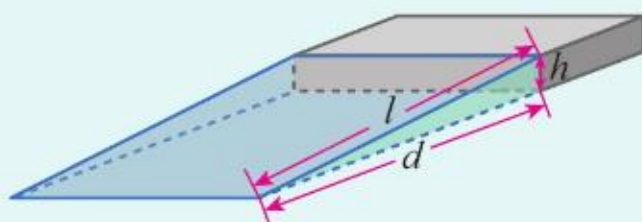
综合运用

- 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AB=c$.
 - 如果 $\angle A=30^\circ$, 求 BC , AC ;
 - 如果 $\angle A=45^\circ$, 求 BC , AC .

8. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=2.1$, $BC=2.8$. 求:

(1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) 斜边 AB ; (3) 高 CD .

9. 如图, 一处台阶的高 $h=15\text{ cm}$, 为了行走方便, 准备在台阶处修建一个水泥坡道. 如果所修坡道的坡度 $\frac{h}{d}$ 为 $\frac{1}{12}$, 那么所修坡道的长度 l 为多少 (结果保留小数点后两位)?



(第 9 题)

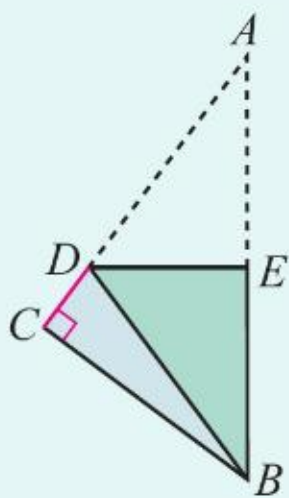
10. 如图, 有一个水池, 水面是一个边长为 10 尺的正方形, 在水池正中央有一根芦苇, 它高出水面 1 尺. 如果把这根芦苇拉向水池一边的中点, 它的顶端恰好到达池边的水面. 水的深度与这根芦苇的长度分别是多少?



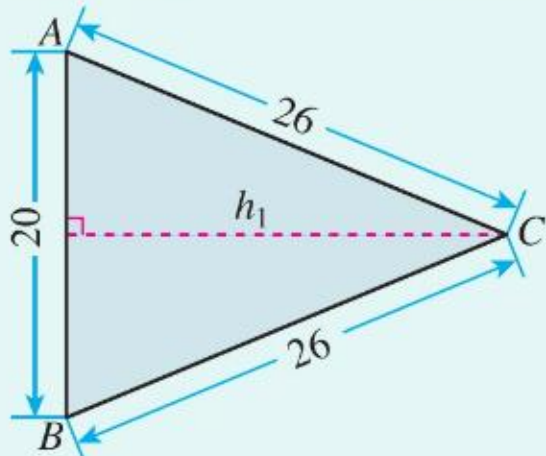
(第 10 题)

此题源自《九章算术》, 原文是: 今有池方一丈, 葭生其中央, 出水一尺. 引葭赴岸, 适与岸齐. 问水深、葭长各几何. (丈、尺是长度单位, 1 丈=10 尺.)

11. 如图, 一张三角形纸片 ABC , $\angle C=90^\circ$, $AC=8\text{ cm}$, $BC=6\text{ cm}$. 将纸片沿直线 DE 折叠, 使点 A 与 B 重合, 求 CD 的长.

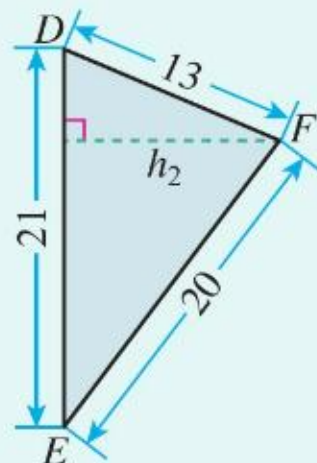


(第 11 题)



甲

(第 12 题)



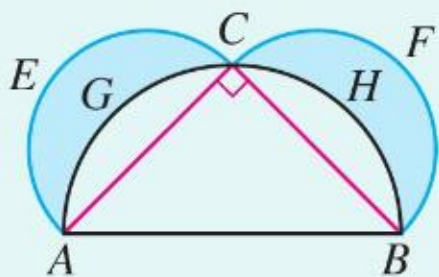
乙

12. 甲、乙两个三角形工件的尺寸 (单位: mm) 如图所示, 分别求它们的高 h_1 , h_2 .

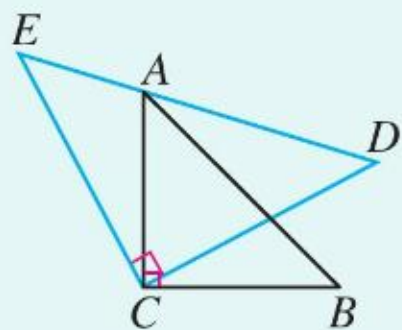
拓展探索

13. 如图, 分别以等腰直角三角形 ABC 的边 AB , AC , BC 为直径画半圆. 求证:

所得两个月牙形图案 $AGCE$ 和 $BHCF$ 的面积之和 (图中阴影部分) 等于 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的面积.



(第 13 题)



(第 14 题)

14. 如图, $\triangle ACB$ 和 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形, $CA = CB$, $CE = CD$, $\triangle ACB$ 的顶点 A 在 $\triangle ECD$ 的斜边 DE 上. 求证: $AE^2 + AD^2 = 2AC^2$. (提示: 连接 BD .)

阅读与思考

勾股定理的证明

三千多年来, 人们对勾股定理的证明颇感兴趣. 不仅因为这个定理重要、基本, 还因为其贴近人们的实际生活, 以至古往今来, 一直有大量的数学工作者与爱好者在研究勾股定理的证明方法, 证明的方法越来越多. 下面介绍几种证明勾股定理的方法, 你能根据这些图形及提示证明勾股定理吗?

1. 利用弦图的另一种证法 (图 1)

提示: 以斜边为边的正方形的面积 + 4 个三角形的面积 = 外正方形的面积.

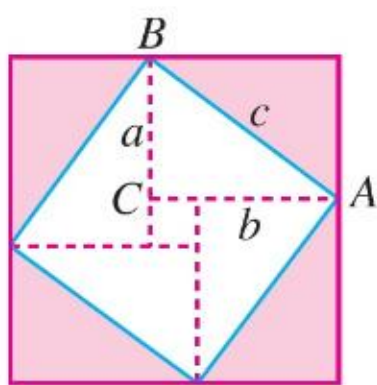
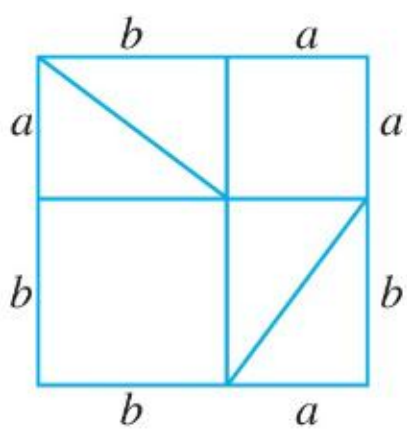
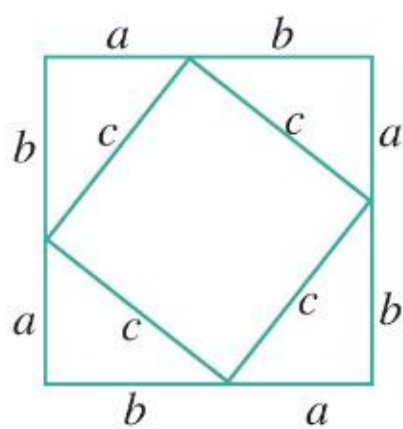


图 1



(1)



(2)

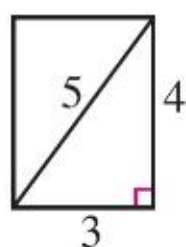
图 2

2. 传说中毕达哥拉斯的证法 (图 2)

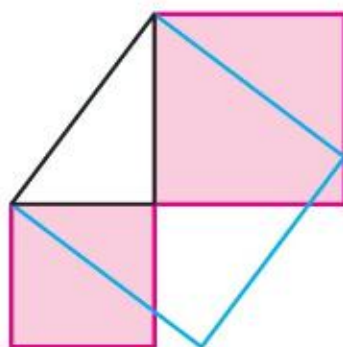
提示: (1) 中拼成的正方形与 (2) 中拼成的正方形面积相等.

3. “折矩-积矩”法 (图 3)

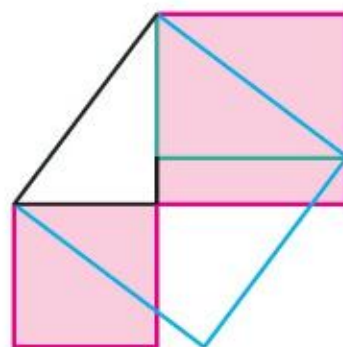
注：依据《周髀算经》中的商高之语，得此证法。



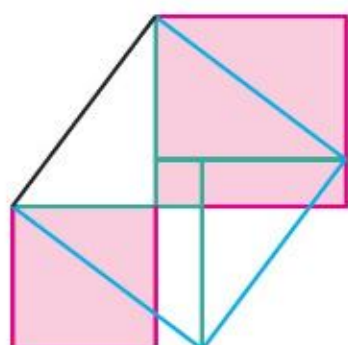
故折矩，以为勾广三，
股修四，径隅五



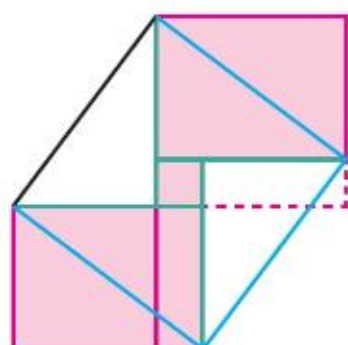
既方之



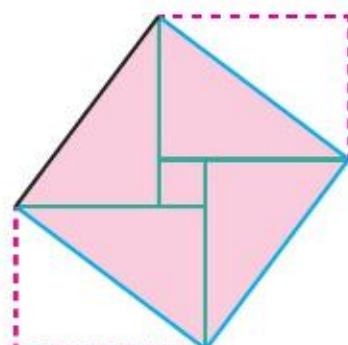
外半其一矩



环而共盘



第一次割补



第二次割补

图 3

4. 《原本》中的证法 (图 4)

提示：正方形 $DGHI$ 的面积等于 $\triangle CDI$ 的面积 2 倍，长方形 $AKJD$ 的面积等于 $\triangle ADG$ 的面积 2 倍，又 $\triangle CDI \cong \triangle ADG$ ，从而得正方形 $DGHI$ 的面积等于长方形 $AKJD$ 的面积。同理，正方形 $CEFG$ 的面积等于长方形 $BCJK$ 的面积。

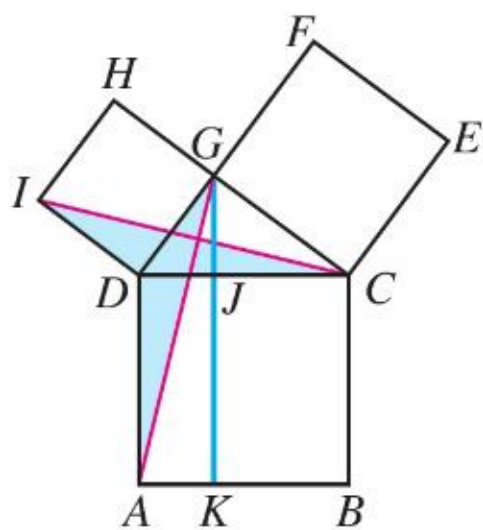


图 4

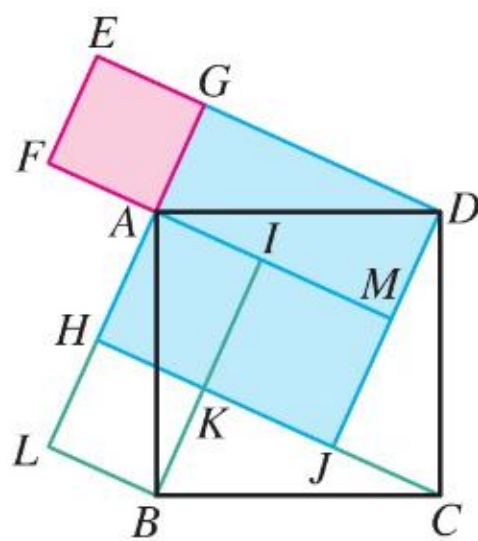


图 5

5. 梅文鼎的证法 (图 5)

提示：正方形 $AGEF$ 的面积 + 正方形 $HJDG$ 的面积 = 正方形 $ABCD$ 的面积。

关于勾股定理，刘徽、达·芬奇等人都给出过巧妙的证法，请查阅资料了解。你能给出其他证明方法吗？

20.2 勾股定理的逆定理及其应用

由勾股定理可以知道，直角三角形的两条直角边长的平方和等于斜边长的平方. 反过来，如果三角形的三条边满足两条边长的平方和等于第三条边长的平方，那么这个三角形是不是直角三角形呢？

图 20.2-1 给出了确定直角的一种方法：把一根长绳打上等距离的 13 个结，然后以 3 个结间距、4 个结间距、5 个结间距的长度为边长，用木桩将长绳钉成一个三角形，其中一个角便是直角.

上述方法意味着，如果围成三角形的三边长分别为 3，4，5，它们满足关系“ $3^2 + 4^2 = 5^2$ ”，那么围成的三角形是直角三角形. 一般地，满足两条边长的平方和等于第三条边长的平方的三角形是不是直角三角形呢？

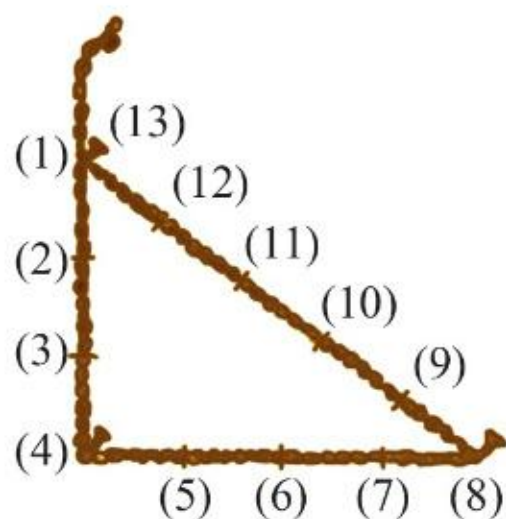


图 20.2-1

观察

画一画，如果三角形的三边长分别为 2.5 cm，6 cm，6.5 cm，它们满足关系“ $2.5^2 + 6^2 = 6.5^2$ ”，画出的三角形是直角三角形吗？换成三边长分别为 4 cm，7.5 cm，8.5 cm，再试一试.

由上面的尝试，我们猜想：

如果三角形的三边长 a ， b ， c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$ ，那么这个三角形是直角三角形.

这个猜想就是勾股定理的逆命题，下面证明这个猜想.

如图 20.2-2 (1)，已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a ， b ， c ，满足 $a^2 + b^2 = c^2$. 求证 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

直接证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形比较困难. 回顾已经学过的知识，可以作一个两条直角边长分别为 a ， b 的直角三角形，如果能证明 $\triangle ABC$ 与所作的直

角三角形全等，那么就能证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

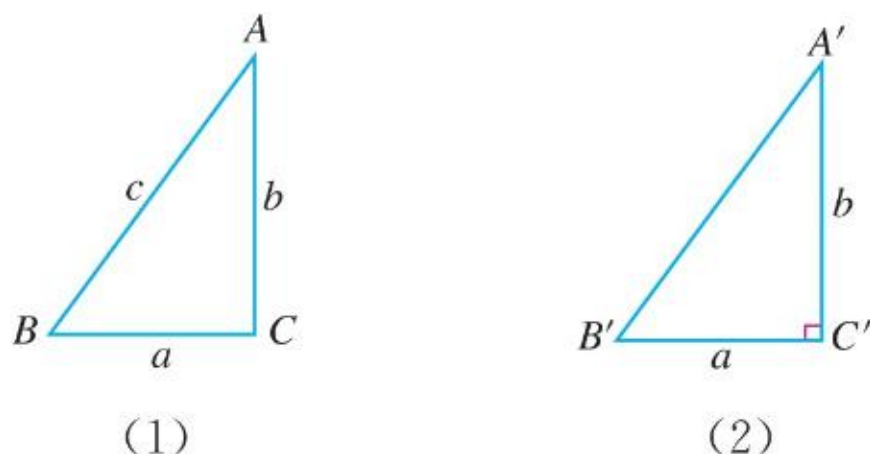


图 20.2-2

如图 20.2-2 (2), 作一个 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$, 使 $B'C'=a$, $A'C'=b$, $\angle C'=90^\circ$. 根据勾股定理, $A'B'^2=B'C'^2+A'C'^2=a^2+b^2$. 因为 $a^2+b^2=c^2$, 所以 $A'B'=c$. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, $BC=a=B'C'$, $AC=b=A'C'$, $AB=c=A'B'$, 所以 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (SSS). 因此 $\angle C=\angle C'=90^\circ$, 即 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

这样, 我们证明了勾股定理的逆命题是正确的, 它也是一个定理. 这个定理叫作**勾股定理的逆定理**. 它是判定直角三角形的一个依据.

例 1 判断由线段 a, b, c 组成的三角形是不是直角三角形:

(1) $a=8, b=15, c=17$;

(2) $a=14, b=13, c=15$.

分析: 根据勾股定理及其逆定理, 判断一个三角形是不是直角三角形, 只要判断两条较小边长的平方和是否等于最大边长的平方.

解: (1) 因为 $8^2+15^2=64+225=289$,

$$17^2=289,$$

所以 $8^2+15^2=17^2$.

根据勾股定理的逆定理, 由线段 a, b, c 组成的三角形是直角三角形.

(2) 因为 $14^2+13^2=196+169=365$,

$$15^2=225,$$

所以 $14^2+13^2 \neq 15^2$.

根据勾股定理, 由线段 a, b, c 组成的三角形不是直角三角形.

像 8, 15, 17 这样, 能够成为直角三角形三条边长的三个正整数, 称为勾股数.

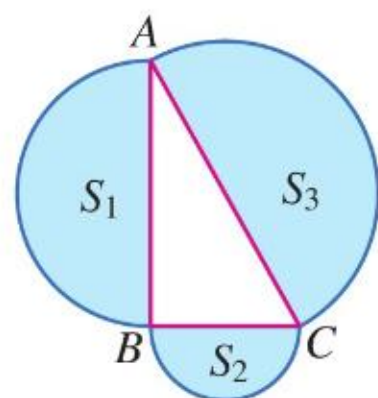
对于例 1 (2), 如果这个三角形是直角三角形, 那么根据勾股定理应有 $a^2+b^2=c^2$. 事实上, 上式不成立. 因此, 这个三角形不是直角三角形.

练习

1. 判断由线段 a, b, c 组成的三角形是不是直角三角形:

- (1) $a=4, b=5, c=6$;
- (2) $a=2.5, b=0.7, c=2.4$;
- (3) $a=\frac{1}{5}, b=\frac{1}{4}, c=\frac{1}{3}$;
- (4) $a=1, b=\sqrt{2}, c=\sqrt{3}$.

2. 如图, 以 $\triangle ABC$ 的三边为直径, 分别画三个半圆, 三个半圆的面积分别为 S_1, S_2, S_3 . 若 $S_1 + S_2 = S_3$, 判断 $\triangle ABC$ 是不是直角三角形, 并说明理由.



(第2题)

利用勾股定理的逆定理, 可以解决一些实际问题.

例2 如图 20.2-3, 港口 P 位于东西方向的海岸线上. “远航”号、“海天”号轮船同时离开港口, 各自沿一固定方向航行, “远航”号每小时航行 16 n mile, “海天”号每小时航行 12 n mile. 它们离开港口 1.5 h 后分别位于点 Q, R 处, 且相距 30 n mile. 如果“远航”号沿东北方向航行, 那么“海天”号沿什么方向航行?

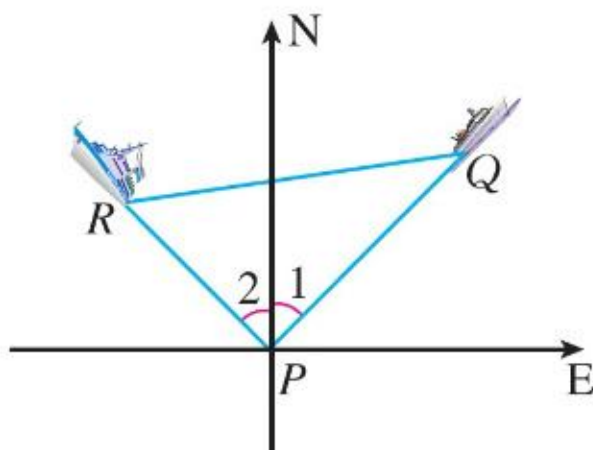


图 20.2-3

分析: 在图 20.2-3 中可以看到, 由于“远航”号的航向已知, 如果能求出两艘轮船的航向所成的角, 就能知道“海天”号的航向了.

解: 根据题意,

$$PQ = 16 \times 1.5 = 24,$$

$$PR = 12 \times 1.5 = 18,$$

$$QR = 30.$$

因为 $24^2 + 18^2 = 30^2$, 即 $PQ^2 + PR^2 = QR^2$, 所以 $\angle QPR = 90^\circ$.

由“远航”号沿东北方向航行可知, $\angle 1 = 45^\circ$. 因此 $\angle 2 = 45^\circ$, 即“海天”号沿西北方向航行.

可以综合运用勾股定理及其逆定理解决问题.

例 3 如图 20.2-4, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=5$, $BC=3$, $AD=\frac{5}{3}$, $DC=\frac{13}{3}$. 如果 $AC \perp BC$,

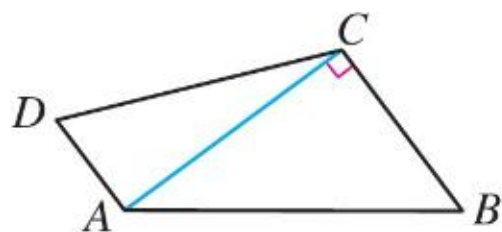


图 20.2-4

分析: 若能求出 AC 的长, 就可以根据勾股定理或其逆定理判断 $\triangle ACD$ 是不是直角三角形, 从而判断 AC 是否垂直于 AD .

解: 因为 $AC \perp BC$, 所以 $\angle ACB = 90^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 5^2 - 3^2 = 16.$$

所以 $AC=4$.

在 $\triangle ACD$ 中,

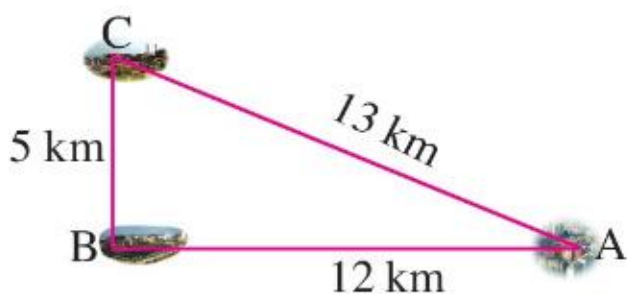
$$AC^2 + AD^2 = 4^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{169}{9}, \quad CD^2 = \left(\frac{13}{3}\right)^2 = \frac{169}{9},$$

所以 $AC^2 + AD^2 = CD^2$.

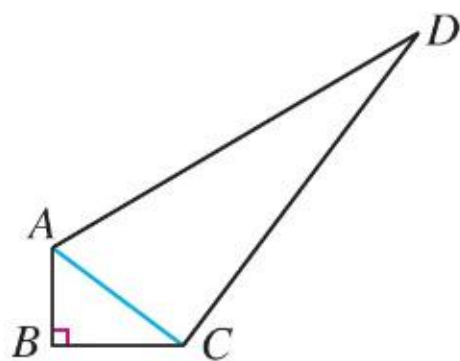
因此 $\triangle ACD$ 是直角三角形, 即 $AC \perp AD$.

练习

1. A , B , C 三地的两两距离如图所示, A 地在 B 地的正东方向, C 地在 B 地的什么方向?



(第 1 题)



(第 3 题)

2. 高师傅有 5 根长度 (单位: dm) 分别为 $a=6$, $b=8$, $c=10$, $d=24$, $e=26$ 的钢条, 准备选 3 根焊接一个直角三角形钢架. 请你帮高师傅找出所有可能的钢条组合.
3. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $BC=4$, $CD=12$, $AD=13$, $\angle B=90^\circ$. 求四边形 $ABCD$ 的面积.

习题 20.2

复习巩固

1. 判断由线段 a, b, c 组成的三角形是不是直角三角形:

(1) $a=9, b=40, c=41$;

(2) $a=\sqrt{41}, b=4, c=5$;

(3) $a=\frac{5}{4}, b=1, c=\frac{3}{4}$;

(4) $a=40, b=50, c=60$.

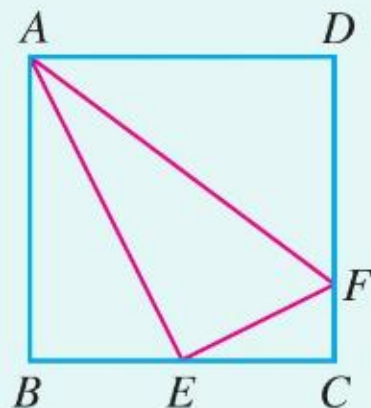
2. 已知三条线段的长分别为 6, 10, x , 以这三条线段为边, 恰好可以构成一个直角三角形, 求 x .

3. 刘伟先向东走了 80 m, 然后换了一个方向走了 60 m, 再换第三个方向走了 100 m, 此时恰好回到原地. 刘伟向哪个方向走了 60 m? 请说明理由.

综合运用

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=13, BC=10$, BC 边上的中线 $AD=12$. 求 AC 的长.

5. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是 BC 的中点, F 是 CD 上一点, 且 $CF=\frac{1}{4}CD$. 求证 $\angle AEF=90^\circ$.



(第 5 题)

拓广探索

6. 我们知道 3, 4, 5 是一组勾股数, 那么 $3k, 4k, 5k$ (k 是正整数) 也是一组勾股数吗? 一般地, 如果 a, b, c 是一组勾股数, 那么 ak, bk, ck (k 是正整数) 也是一组勾股数吗?



数学瑰宝——勾股定理

勾股定理作为数学历史长河中古老的定理之一，堪称人类数学文明中的一枚璀璨瑰宝。那么，这枚瑰宝从何而来？在众多古代数学文明中都可觅得其踪迹。

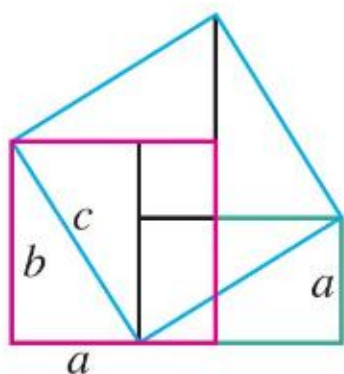


商高（约公元前 11 世纪）

《周髀算经》中记载了勾股定理，商高指出了“勾三股四弦五”这一勾股定理的特殊形式，陈子测日的方法“若求邪至日者，以日下为勾，日高为股。勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日”是对勾股定理一般形式的明确表述。



约公元前 1700 年的古巴比伦泥版上，记载了多组由楔形文字表示的勾股数。



在古印度的《测绳的法经》中，记载着勾股定理与几组勾股数，这些知识用于建造施工时确定直角，勾股定理在其中的表述为：以矩形对角线为边的正方形面积，等于分别以矩形两邻边为边的正方形面积之和。

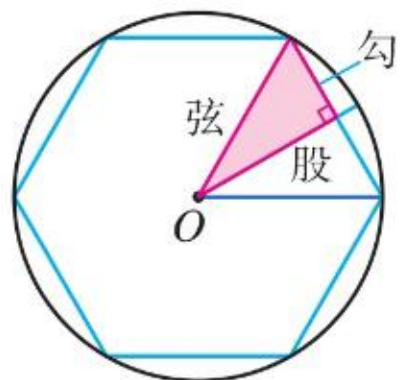


《原本》阿拉伯文译本

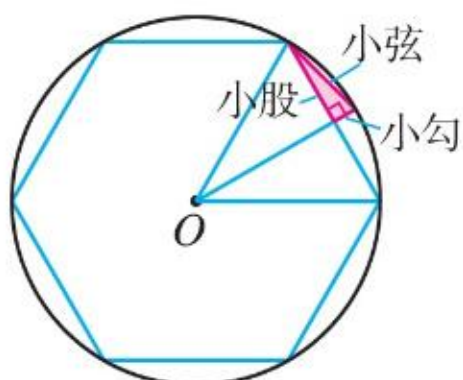
《原本》第一卷的命题 47 即勾股定理：在直角三角形中，直角所对边上的正方形面积等于两直角边上的正方形面积之和。命题 48 是勾股定理的逆定理，欧几里得对这两个定理都进行了严格的证明。

在各大古代数学文明中熠熠生辉的勾股定理，因其巧妙地将“数”与“形”关联在一起，从而为数学的发展提供了动力。

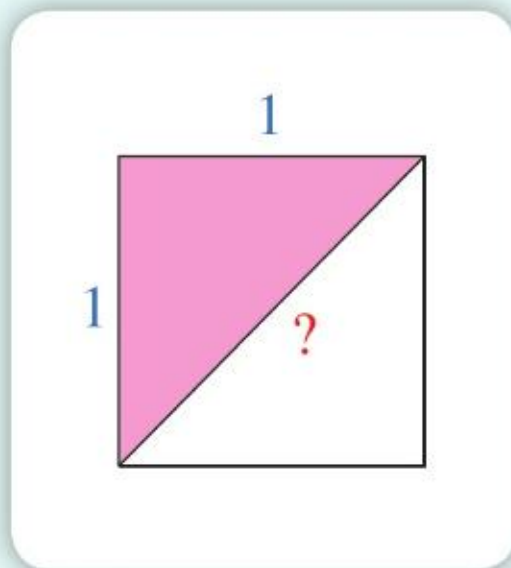
在我国古代数学发展的历程中，勾股定理具有很强的应用性。如用于计算圆周率的割圆术，其理论基础就包括勾股定理。



第一次使用勾股定理



第二次使用勾股定理

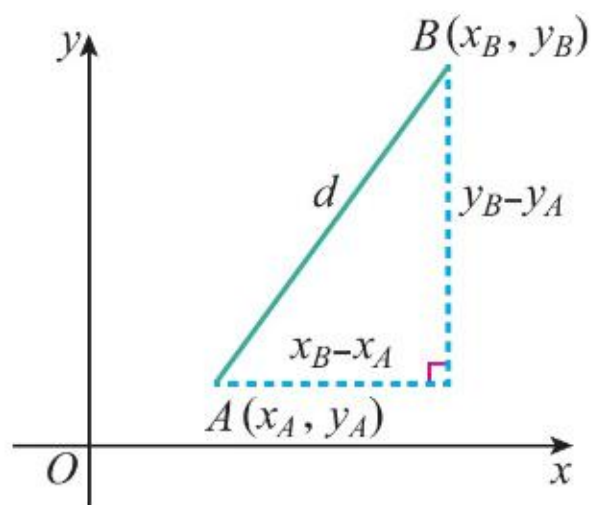


古希腊时期，数学家证明了边长为 1 的正方形的对角线不能表示为两个整数的比，证明过程中就用到了勾股定理，这为人类更好地认识数学，促进数学的发展提供了机遇。

勾股定理是中国古代数学发展的一个出发点。



吴文俊
(1919—2017)



在平面解析几何中，通过勾股定理得到任意两点 A ， B 之间的距离 $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ ，勾股定理成为解析几何发展中必不可少的基础性工具。而在定义一些更高维度空间中两点间的距离时，也常使用勾股定理或其变形作为一种重要的刻画距离的方式。

勾股定理的发现离不开人的思考，更离不开人们对数学真理的追求。勾股定理这一数学瑰宝，既是存在于客观世界中的数学真理，也是在人类智慧“浇灌”下，数学领域中绽放出的一朵思维之花。

数学活动

活动 利用勾股定理绘制图案

利用勾股定理，可以绘制出各种不同的图案. 图 1 中的图案均与勾股定理有关，不仅体现出勾股定理在图案设计中的应用，还彰显出数学的“无限”之美. 这些图案是如何利用勾股定理绘制的呢？

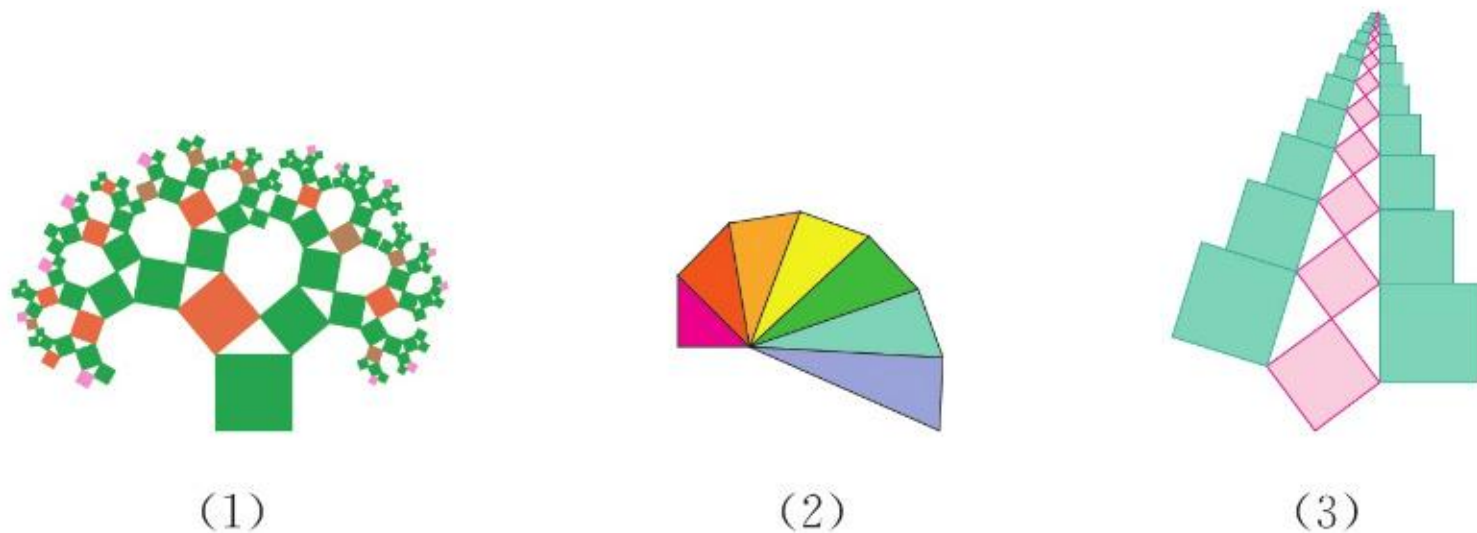


图 1

图 1 (1) 形如一棵树，有人称之为“勾股树”. 绘制这个图案，需要先画一个如图 2 所示的图形，再以图形中的两个较小的正方形为基础，在两个小正方形的上方，分别作出两个形状与图 2 相同的图形，如图 3 所示. 如此重复下去，最后填充颜色，就可以得到类似于图 1 (1) 的“勾股树”.



图 2

图 3

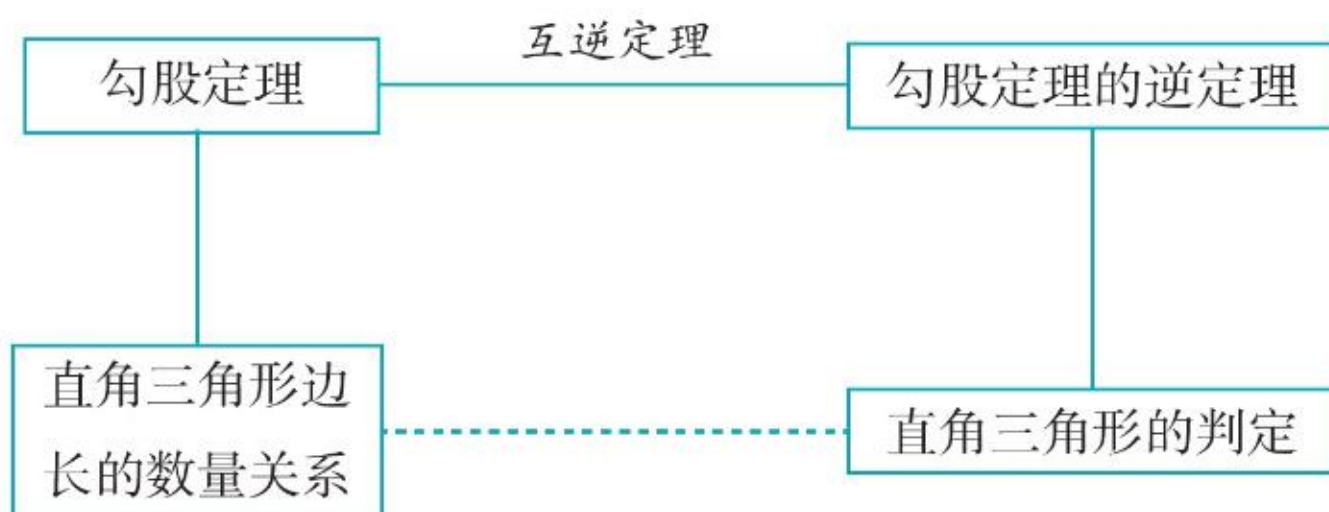
像上面这样，按照相同的方法画图，并在新生成的图形上多次重复这个过程，就形成一幅无限生长的树形图案.

你知道图 1 (2) 和图 1 (3) 是如何利用勾股定理绘制的吗？

请你尝试创作一幅与勾股定理有关的图案，并向同学分享你的作品及其蕴含的数学秘密.

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章我们通过对以直角三角形三边为边长的正方形面积之间的关系探究，发现并证明了勾股定理. 勾股定理是数学中重要的定理之一，它反映了直角三角形三边之间的数量关系，在解决与直角三角形相关的问题或一些其他数学问题时都起着重要作用. 在我国古代数学研究中，经常借助于图形的面积研究相关的数量关系，充分利用了几何直观，体现了古人的卓越智慧.

得到一个数学结论后，经常要研究其逆命题是否成立. 经证明勾股定理的逆命题成立，它是一个定理. 勾股定理揭示了直角三角形的一条性质，而勾股定理的逆定理提供了直角三角形的一种判定方法.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

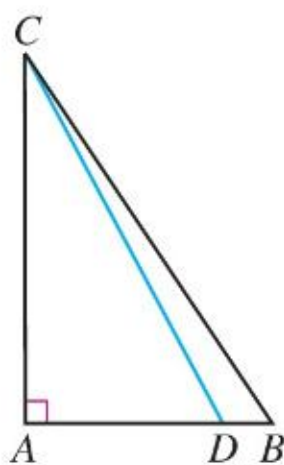
1. 直角三角形三边的长有什么特殊的关系？
2. 赵爽证明勾股定理运用了什么思想方法？
3. 已知一个三角形的三边长，怎样判断它是不是直角三角形？
4. 勾股定理的逆定理是如何证明的？



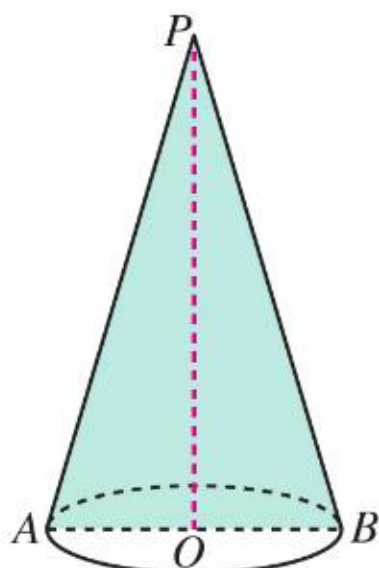
复习题 20

复习巩固

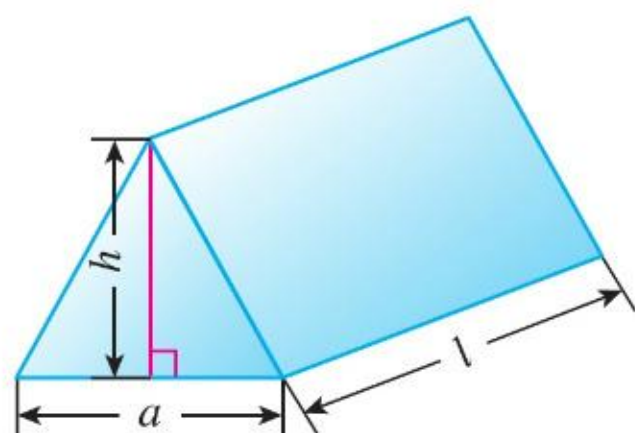
- 如图，点 D 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的边 AB 上， $AD=8$ ， $DB=2$ ， $CD=17$. 求 AC 和 BC 的长.
- 两人从同一地点同时出发，一人以 20 m/min 的速度向北直行，另一人以 30 m/min 的速度向东直行. 10 min 后他们相距多远 (结果取整数)?
- 如图，过圆锥的顶点 P 和底面圆的圆心 O 的平面截圆锥得截面 $\triangle PAB$ ，其中 $PA=PB$ ， AB 是圆锥底面圆 O 的直径. 已知 $PA=7$ ， $AB=4$ ，求截面 $\triangle PAB$ 的面积.



(第 1 题)

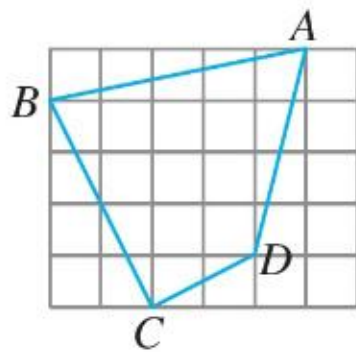


(第 3 题)



(第 4 题)

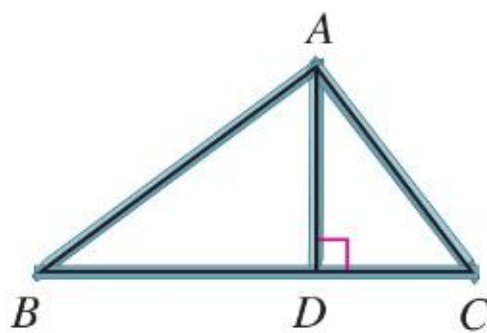
- 如图，帐篷的长 $l=2.6\text{ m}$ ，其横截面是一个底边长 $a=2\text{ m}$ ，高 $h=1.8\text{ m}$ 的等腰三角形. 制作此帐篷 (不包含底面) 至少需要用多少平方米布料 (结果保留小数点后一位)?
- 如图，每个小正方形的边长都为 1.
 - 求四边形 $ABCD$ 的面积和周长.
 - $\angle BCD$ 是直角吗? 请说明理由.



(第 5 题)

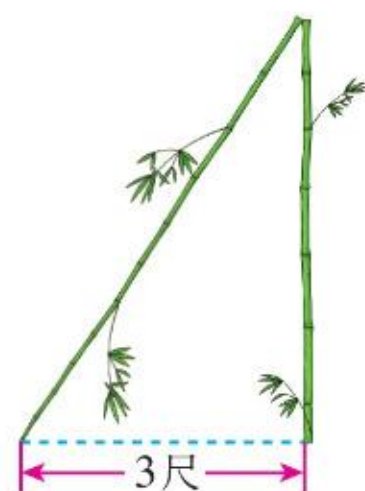
综合运用

- 如图，在三角形支架中， $AD \perp BC$ ，垂足为 D ， $AB=2\text{ m}$ ， $AC=1.5\text{ m}$ ， $DC=0.9\text{ m}$.
 - 求 BD 的长;
 - 判断支架外框 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由.



(第 6 题)

7. 如图, 一根竹子高 1 丈, 折断后竹子顶端落在离竹子底端 3 尺处. 折断处离地面的高度是多少? (此题出自《九章算术》, 其中的丈、尺是长度单位, 1 丈=10 尺.)



(第 7 题)

8. 古希腊哲学家柏拉图曾指出, 如果 m 表示大于 1 的整数, $a=2m$, $b=m^2-1$, $c=m^2+1$, 那么 a, b, c 为勾股数. 你认为这种说法正确吗? 如果正确, 请给出证明, 并利用这个结论写出一些勾股数.

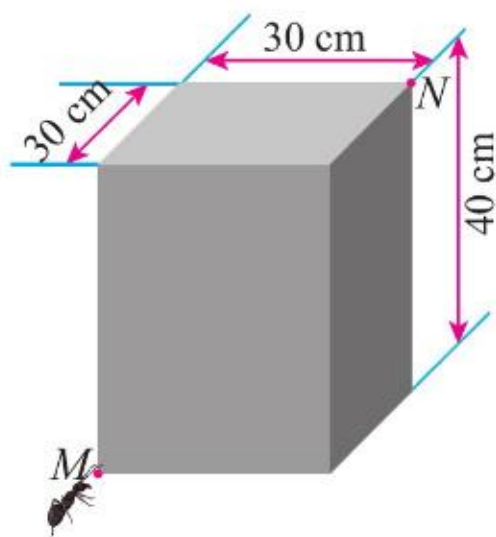
9. 如图, 一个长方形由 5 个边长为 1 的正方形组成, 请把它分割后拼接成一个大正方形.



(第 9 题)

拓展探索

10. 一根 70 cm 长的木棒, 要放在长、宽、高分别是 50 cm, 40 cm, 30 cm 的长方体木箱中, 能放进去吗? (提示: 长方体的高垂直于底面的任何一条直线.)
11. 公园中一长方体石凳如图所示, 若一只蚂蚁以 3 cm/s 的速度从点 M 爬到点 N , 最快需要多长时间 (结果保留小数点后一位)?
12. $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c , 面积为



(第 11 题)

S . 利用勾股定理证明秦九韶公式 $S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2 b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]}$. (提示: 设 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的高为 BD , 利用勾股定理先将 CD 用三边长表示, 再将 BD 用三边长表示.)

第二十一章 四边形

现实世界的很多物体中都有四边形的形象，例如，宏伟的建筑、一望无际的农田、开关自如的伸缩门、别具一格的窗棂……

在小学，我们知道什么是四边形，还学习过长方形、正方形、平行四边形和梯形等特殊的四边形的有关知识。本章我们将进一步学习四边形，特别是一些特殊的四边形——平行四边形、矩形、菱形、正方形。在掌握它们的概念，理解它们之间关系的基础上，利用已有的几何知识，探索并证明它们的性质和判定方法；进一步体会研究图形性质的一般思路和方法，即通过观察、实验、类比、推广、特殊化等途径和方法，对构成图形的边、角等元素的数量关系和位置关系进行讨论，利用几何直观发现图形的性质，再通过逻辑推理证明它们。



21.1 四边形及多边形

与三角形一样，四边形也是一种基本的几何图形. 本节我们类比三角形，学习四边形的一些概念和性质，并把它们推广到多边形.

21.1.1 四边形及其内角和

与三角形类似，如图 21.1-1，在平面内，由不在同一直线上的四条线段首尾顺次相接组成的图形叫作**四边形** (quadrilateral)，组成四边形的各条线段叫作**四边形的边**，每相邻两条线段的公共端点叫作**四边形的顶点**. 四边形用表示它的各个顶点的字母表示，例如，图 21.1-1 中的四边形，可以按照顶点的顺序，记作“四边形 $ABCD$ ”.

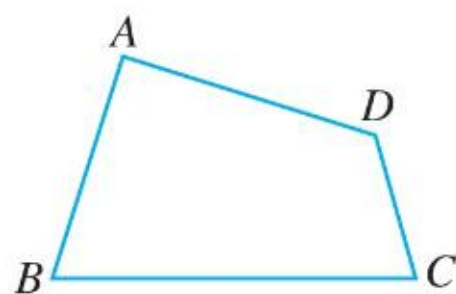


图 21.1-1

如图 21.1-2(1)，画出四边形 $ABCD$ 的任何一条边（例如 CD ）所在直线，整个四边形都在这条直线的同一侧，这样的四边形叫作凸四边形. 而图 21.1-2(2) 中的四边形 $ABCD$ 就不是凸四边形，因为画出边 CD （或 BC ）所在直线，整个四边形不都在这条直线的同一侧. 今后，如无特殊说明，所讨论的四边形都是凸四边形.

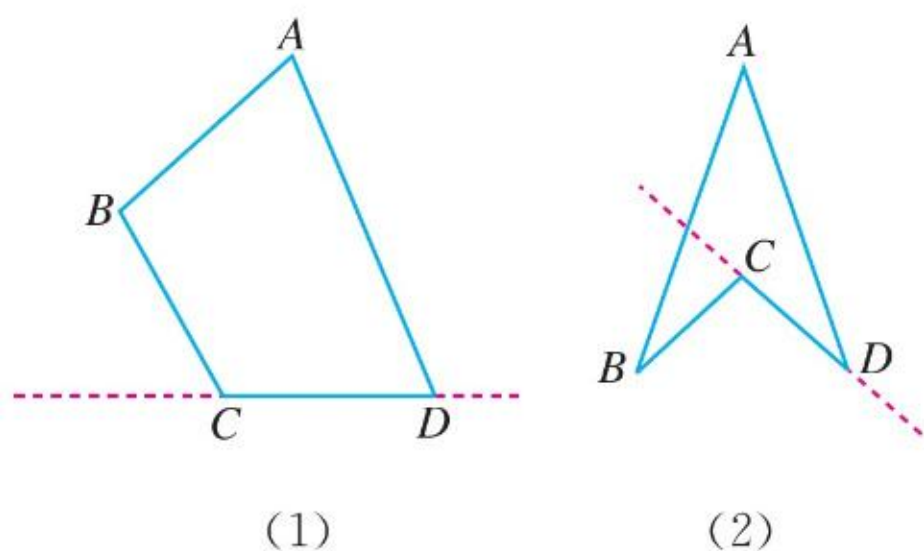


图 21.1-2

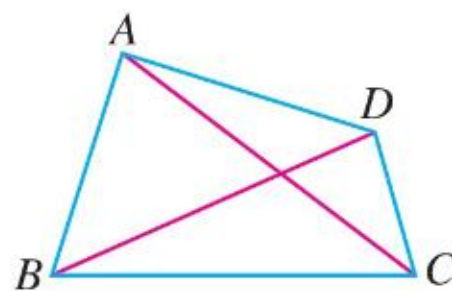


图 21.1-3

连接四边形不相邻的两个顶点的线段，叫作四边形的**对角线** (diagonal). 在图 21.1-3 中， AC ， BD 是四边形 $ABCD$ 的两条对角线，它们分别将四边形 $ABCD$ 分为两个三角形.

与三角形类似，四边形相邻两边组成的角叫作**四边形的内角**，简称**四边形的角**；四边形的角的一边与另一边的延长线组成的角叫作**四边形的外角**。

下面研究四边形的内角与外角的性质。

请在图 21.1-1 中分别画出四边形 $ABCD$ 顶点 A, C 处的外角。

思考

我们知道，三角形的内角和是 180° ，长方形的内角和是 360° 。那么，任意一个四边形的内角和是多少度？你能证明你的结论吗？

由于四边形的一条对角线将这个四边形分为两个三角形，所以四边形的有关问题就可以利用三角形的相关知识加以解决。下面按照上述思路解决这个问题。

如图 21.1-4，在四边形 $ABCD$ 中，连接对角线 AC ，则四边形 $ABCD$ 被分为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 两个三角形。在 $\triangle ABC$ 中，由三角形内角和定理，得

$$\angle 1 + \angle B + \angle 3 = 180^\circ.$$

同理 $\angle 2 + \angle 4 + \angle D = 180^\circ.$

由此可得

$$\begin{aligned} & \angle DAB + \angle B + \angle BCD + \angle D \\ &= \angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle 3 + \angle 4 + \angle D \\ &= (\angle 1 + \angle B + \angle 3) + (\angle 2 + \angle 4 + \angle D) \\ &= 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ. \end{aligned}$$

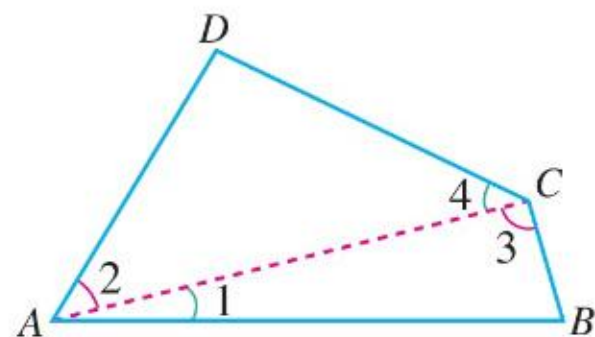


图 21.1-4

即**四边形的内角和等于 360°** 。

例 1 如图 21.1-5，在四边形的每个顶点处各取一个外角，这些外角的和叫作四边形的外角和。四边形的外角和等于多少？

分析：因为四边形的每一个内角与和它相邻的外角是邻补角，所以四边形的外角和与内角和的总和为 $4 \times 180^\circ$ 。根据这个关系，可以利用四边形的内角和求出其外角和。

解：如图 21.1-5。

$$\because \angle DAB \text{ 与 } \angle 1 \text{ 是邻补角,}$$

$$\therefore \angle DAB + \angle 1 = 180^\circ.$$

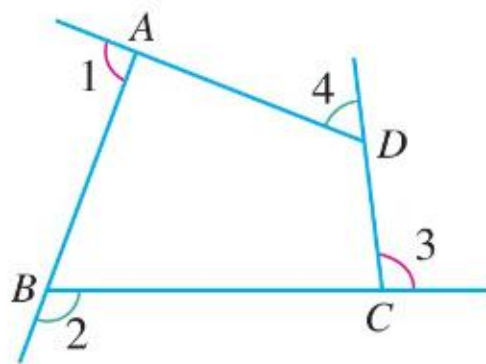


图 21.1-5

同理 $\angle ABC + \angle 2 = 180^\circ$,

$\angle BCD + \angle 3 = 180^\circ$,

$\angle CDA + \angle 4 = 180^\circ$.

$\therefore \angle DAB + \angle 1 + \angle ABC + \angle 2 + \angle BCD + \angle 3 + \angle CDA + \angle 4 = 720^\circ$.

而 $\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 360^\circ$,

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ$.

这样,我们就证明了:

四边形的外角和等于 360° .

在“三角形”一章中,我们通过实验发现三角形具有稳定性,并在学习全等三角形时明白了其中的道理,那么四边形是否具有稳定性呢?

探究

如图 21.1-6(1),在每个角上钉一枚钉子,将四根木条钉成一个四边形木架,然后扭动它,它的形状会改变吗?如图 21.1-6(2),在四边形木架上再钉一根木条,将它的一对不相邻的顶点连接起来,然后再扭动它,这时木架的形状还会改变吗?为什么?

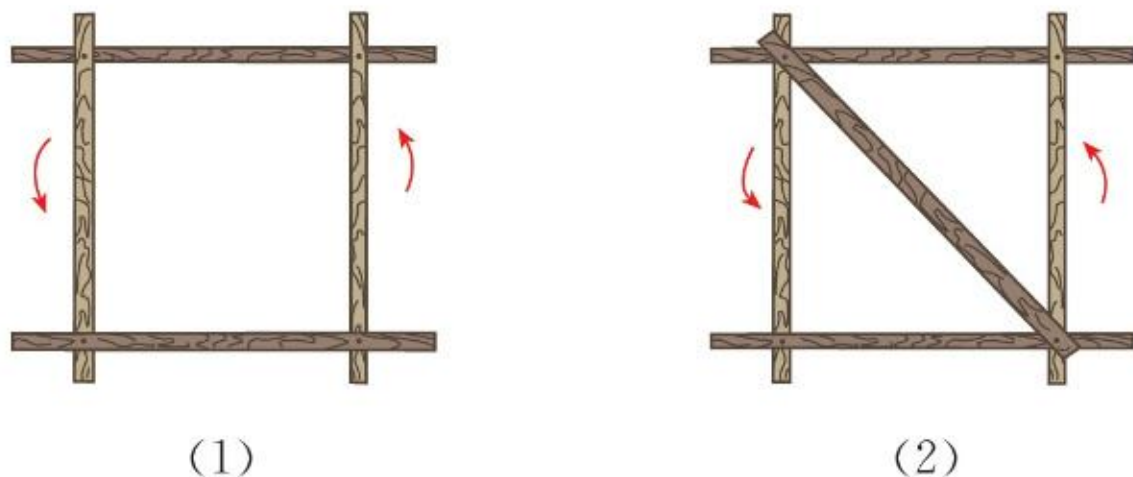


图 21.1-6

可以发现,四边形木架的形状会改变.因为四边形的四条边确定后,四个角并不确定,这说明四边形不具有稳定性.而再钉一根木条后,四边形木架变成两个三角形木架,由于三角形具有稳定性,这时四边形木架的形状不会改变.

在日常生活中,有时需要利用四边形的不稳定性,如图 21.1-7 中的伸缩门、升降机等;有时又需要克服四边形的不稳定性,如图 21.1-8 中在窗框安装好之前,木工师傅常常先在窗框上钉一根木条,以防窗框变形等.



图 21.1-7

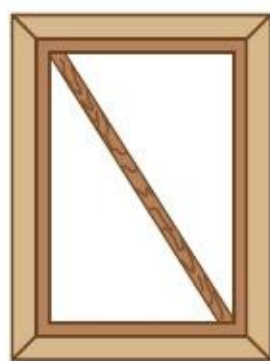
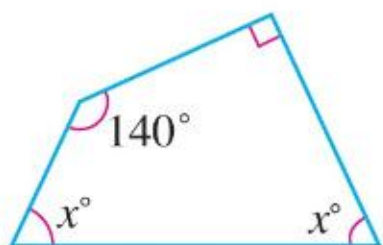


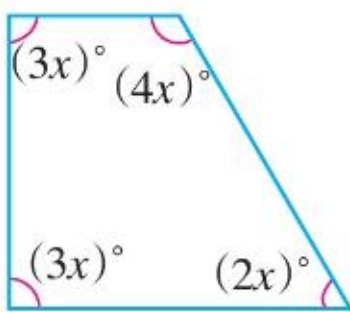
图 21.1-8

练习

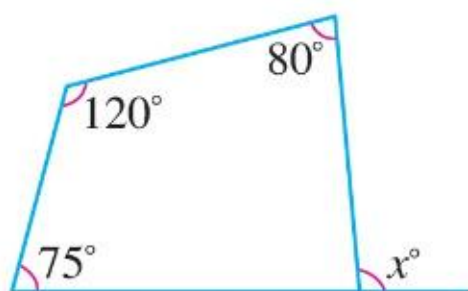
1. 求出下列图形中 x 的值:



(1)



(2)



(3)

(第 1 题)

2. 一个四边形的一组对角互补, 它的另一组对角有什么关系?

3. 下列图形中哪些具有稳定性?



(1)



(2)



(3)



(4)



(5)

(第 3 题)

21.1.2 多边形及其内角和

多边形在生活中也很常见, 观察图 21.1-9 中的图片, 你能从中找出一些多边形的形象吗?



图 21.1-9

与三角形、四边形类似，如图 21.1-10，在平面内，由 n ($n \geq 3$) 条线段 $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ 首尾顺次相接，组成的图形叫作**多边形** (polygon). 多边形的边、顶点、内角、外角、对角线的概念与四边形相应的概念类似. 多边形有几条边就叫作几边形. 多边形同样用表示它的各个顶点的字母表示，例如，图 21.1-11 中的六边形，记作“六边形 $ABCDEF$ ”.

请类比四边形，说出多边形的边、顶点、内角、外角、对角线的定义. 指出图 21.1-11 中六边形的边、顶点、内角和外角，画出它的全部对角线.

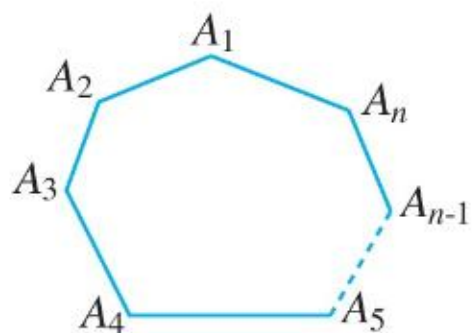


图 21.1-10

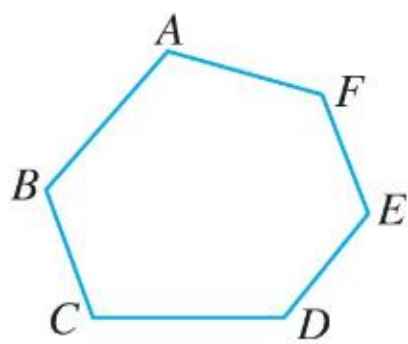


图 21.1-11

与四边形类似，在凸多边形中，有的是凸多边形，有的不是凸多边形. 今后，如无特殊说明，所讨论的多边形都是凸多边形.

我们知道，正方形的各个角都相等，各条边都相等. 像正方形这样，各个角都相等、各条边都相等的多边形叫作**正多边形** (regular polygon). 图 21.1-12 是正多边形的一些例子.

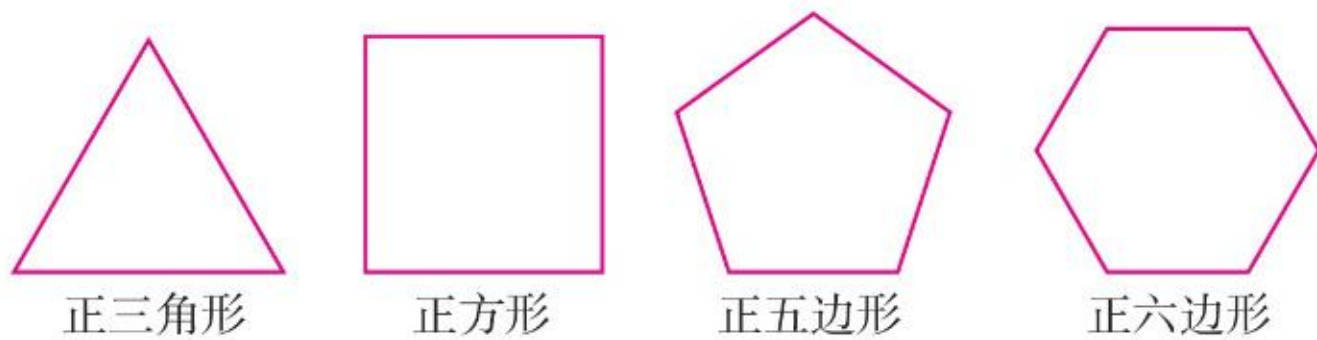


图 21.1-12

探究

类比四边形的内角和的推导过程，你能推导出五边形和六边形的内角和各是多少度吗？由上述推导过程，你能得出多边形的内角和与边数的关系吗？

观察图 21.1-13，可以发现：

从五边形的一个顶点出发,可以作_____条对角线,它们将五边形分为_____个三角形,五边形的内角和等于_____ $\times 180^\circ$;

从六边形的一个顶点出发,可以作_____条对角线,它们将六边形分为_____个三角形,六边形的内角和等于_____ $\times 180^\circ$.

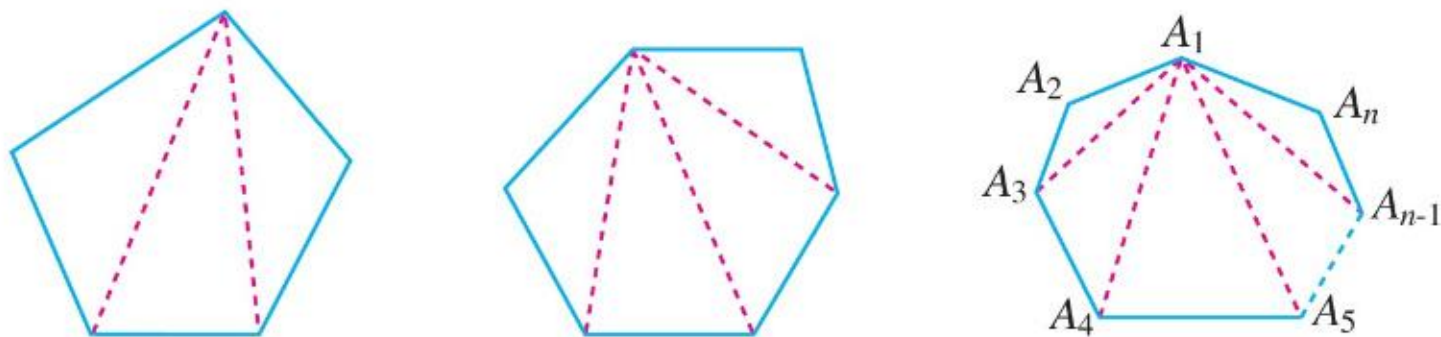


图 21.1-13

一般地,从 n 边形的一个顶点出发,可以作 $(n-3)$ 条对角线,它们将 n 边形分为 $(n-2)$ 个三角形, n 边形的内角和等于 $(n-2)\times 180^\circ$.

这样就得出了多边形的内角和公式:

n 边形的内角和等于 $(n-2)\times 180^\circ$.

把一个多边形分成若干个三角形,还有其他分法吗?由新的分法,能得出多边形的内角和公式吗?

探究

与四边形的外角和类似,在多边形的每个顶点处各取一个外角,它们的和叫作多边形的外角和.多边形的外角和等于多少度?请你说明理由.

与四边形类似,多边形的每一个内角与和它相邻的外角是邻补角,因此 n 边形的内角和与外角和的总和等于 $n\times 180^\circ$,外角和等于

$$n\times 180^\circ - (n-2)\times 180^\circ = 360^\circ.$$

于是得到:

多边形的外角和等于 360° .

也可以这样理解为什么多边形的外角和等于 360° :如图 21.1-14,从多边形的一个顶点 A 出发,沿多边形的各边依次走过各顶点,再回到点 A ,然后转向出发时的方向.在行程中所转的各个角的和,就是多边形的外角和.由于走了一周,所转的各个角的和等于一个周角,所以多边形的外角和等于 360° .

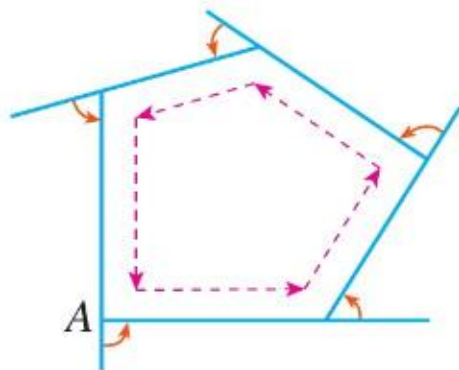


图 21.1-14

例 2 一个多边形的内角和等于外角和的 2 倍, 这个多边形是几边形?

解: 设这个多边形的边数为 n . 因为它的内角和等于 $(n-2) \times 180^\circ$, 外角和等于 360° , 所以

$$(n-2) \times 180^\circ = 2 \times 360^\circ.$$

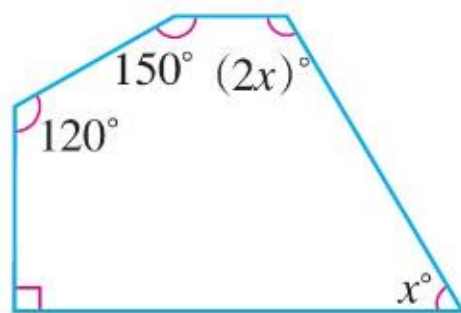
解得

$$n=6.$$

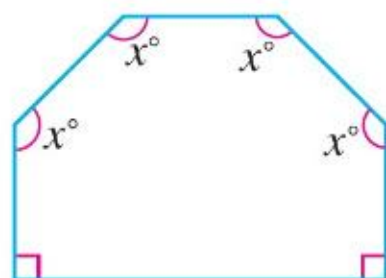
因此这个多边形是六边形.

练习

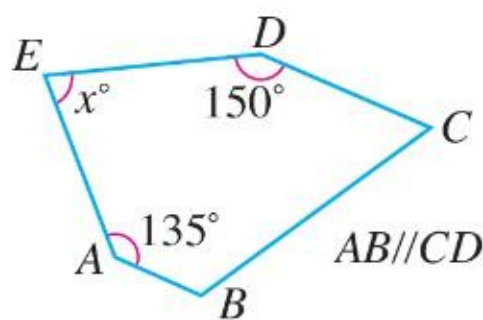
1. 求出下列图形中 x 的值:



(1)



(2)



(3)

(第 1 题)

2. (1) 一个多边形的内角和等于 $1\ 080^\circ$, 这个多边形是几边形?
- (2) 一个多边形的每一个内角都等于 120° , 这个多边形是几边形?
- (3) 一个多边形的每一个外角都等于 72° , 这个多边形是几边形?

习题 21.1

复习巩固

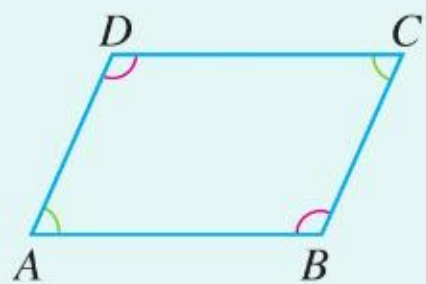
1. 四边形的四个角可以都是锐角吗? 可以都是钝角吗? 可以都是直角吗? 为什么?
2. 填表:

多边形的边数	3	4	5	6	8	12	20
内角和							
外角和							

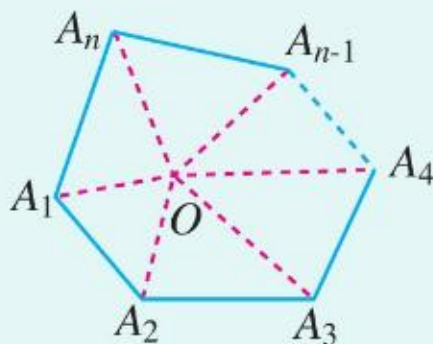
3. 求正五边形和正十边形的每个内角的度数.
4. (1) 一个多边形的内角和与外角和相等, 求它的边数;
(2) 一个多边形的内角和是外角和的一半, 求它的边数.

综合运用

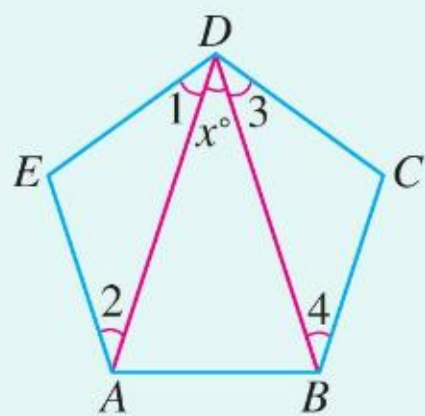
5. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, AB 与 DC 有怎样的位置关系? 为什么? BC 与 AD 呢?



(第 5 题)



(第 6 题)

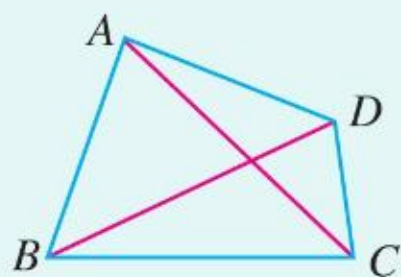


(第 7 题)

6. 如图, 在 n 边形内任取一点 O , 连接点 O 与 n 边形的各个顶点, n 边形被分成多少个三角形? 请你利用这种方法推导 n 边形的内角和公式.
7. 如图, 五边形 $ABCDE$ 的内角都相等, 且 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, 求 x 的值.

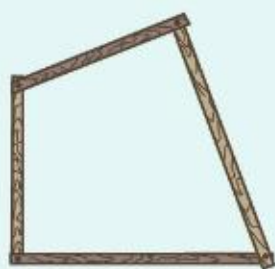
拓广探索

8. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, AC , BD 是它的两条对角线. 比较 $AC + BD$ 与四边形周长的大小.



(第 8 题)

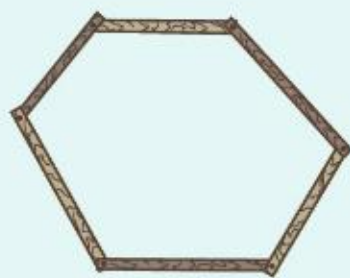
9. 如图, 要使四边形木架 (用 4 根木条钉成) 不变形, 至少要再钉上几根木条? 五边形木架和六边形木架呢?



四边形木架



五边形木架



六边形木架

(第 9 题)

探究与发现

用多边形镶嵌平面

在生活中，很多地面和墙面都是用正方形的瓷砖铺成的（图1）。无论用瓷砖铺地还是贴墙，都要求砖与砖严丝合缝，把地面或墙面全部覆盖。从数学的角度看，这些工作就是用一些不重叠摆放的多边形把平面完全覆盖，通常把这类问题叫作平面镶嵌（或用多边形镶嵌平面）问题。平面镶嵌在设计建筑中的各种图案，计算如何利用空间节省成本、优化晶体结构等工作中发挥着重要作用。



图1

下面，我们来探究一些多边形能否镶嵌平面，并思考为什么会出现这种结果。

1. 分别剪一些边长相同的正三角形、正方形、正五边形、正六边形纸板，如果用其中一种正多边形镶嵌平面，哪几种正多边形能镶嵌平面？
2. 用两种正多边形也可以镶嵌平面，图2是用正三角形和正方形镶嵌平面的例子，你能发现用其他两种正多边形镶嵌平面的例子吗？
3. 任意剪出一些形状、大小相同的三角形纸板（图3（1）），试着拼一拼，它们能镶嵌平面吗？用一些形状、大小相同的四边形纸板（图3（2））呢？

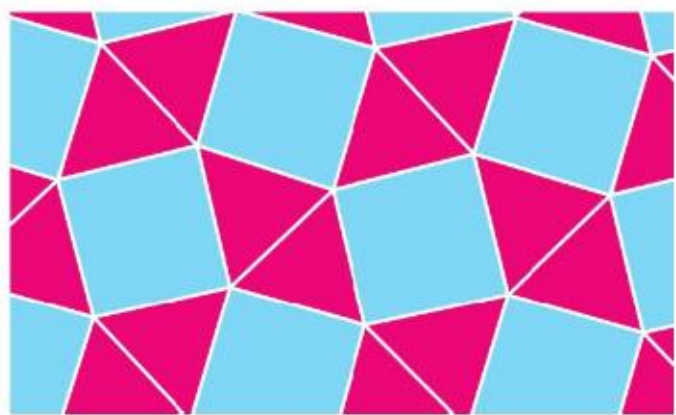


图2

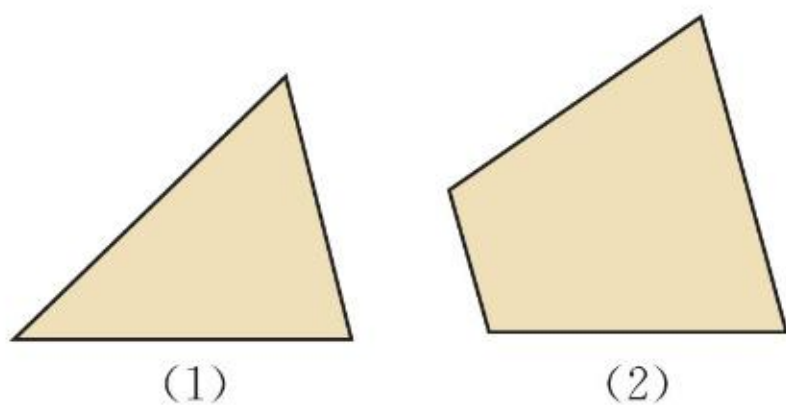


图3

通过以上实验，你能发现用多边形镶嵌平面需要满足的条件吗？

你还可以搜集一些用其他多边形镶嵌平面的图案，或者设计一些地面的平面镶嵌图，并与同学互相交流。

平面镶嵌问题也是数学研究的一个经典问题，吸引了许多数学家和数学爱好者的关注。你可以查阅相关资料，了解平面镶嵌问题的研究进展。

21.2 平行四边形

对于三角形，我们学习了一般三角形后，又学习了等腰三角形和直角三角形. 这是在一般图形的基础上研究特殊图形，我们在研究几何图形时常用这种思路. 对于四边形，从组成它的四条边的位置关系来看，如果它的两组对边分别平行，这个四边形就是平行四边形；如果它只有一组对边平行，这个四边形就是梯形（图 21.2-1）. 本节我们重点学习平行四边形，研究它的性质和判定.

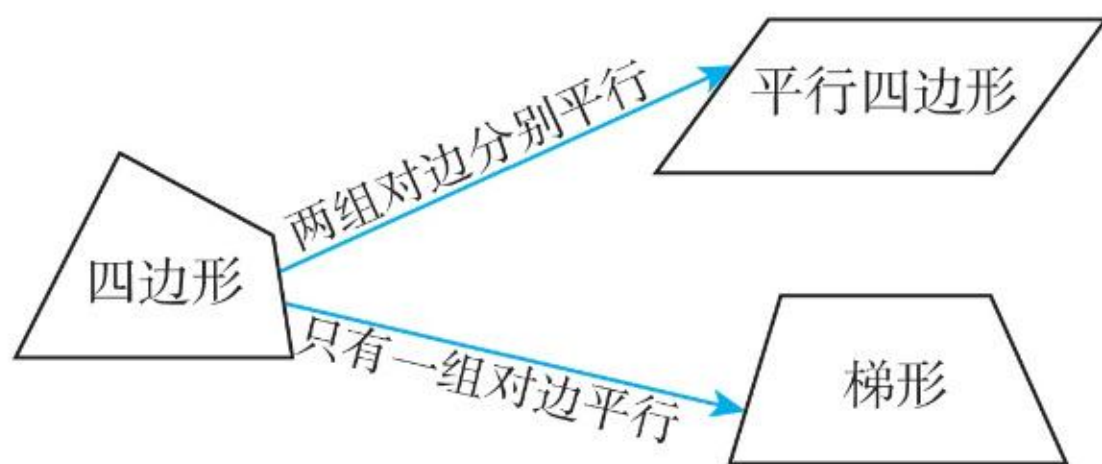


图 21.2-1

21.2.1 平行四边形及其性质

平行四边形是常见的几何图形. 学校的伸缩门、庭院的竹篱笆等（图 21.2-2），都有平行四边形的形象. 你还能举出一些例子吗？

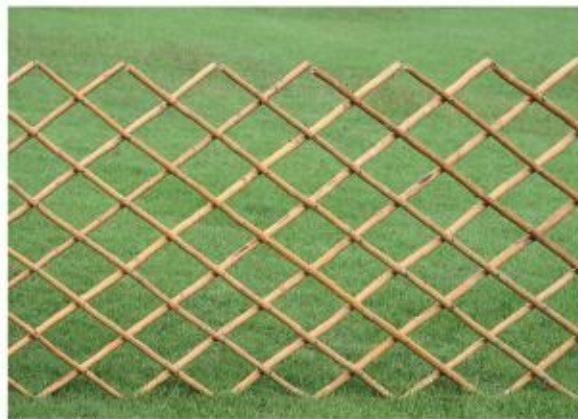


图 21.2-2

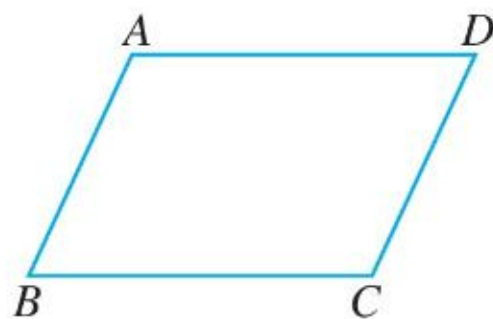


图 21.2-3

我们知道，两组对边分别平行的四边形叫作**平行四边形**（parallelogram）. 平行四边形用“ $\square$ ”表示，如图 21.2-3，平行四边形 $ABCD$ 记作“ $\square ABCD$ ”.

下面，我们从平行四边形的边、角、对角线出发，从数量关系和位置关系的角度研究平行四边形的性质. 先来研究平行四边形的边和角.

探究

根据定义画一个平行四边形并进行观察，除了“两组对边分别平行”，它的边之间还有什么关系？它的角之间呢？度量一下，和你的猜想一致吗？你能证明你的猜想吗？把你的结论和同学比较一下。

通过观察和度量，我们猜想：平行四边形的对边相等；平行四边形的对角相等。下面证明这些猜想。

上述猜想涉及线段相等、角相等，而利用三角形全等得出全等三角形的对应边相等、对应角相等，是证明线段相等、角相等的一种重要方法。为此，可以通过添加辅助线，构造两个三角形，利用三角形全等进行证明。

证明：如图 21.2-4，连接 $\square ABCD$ 的对角线 AC 。

$\because AD \parallel BC, AB \parallel CD,$

$\therefore \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4.$

又 AC 是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 的公共边，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA.$

$\therefore AB = CD, BC = DA, \angle B = \angle D.$

请你自己证明 $\angle BAD = \angle DCB$ 。

这样，就得到平行四边形的性质：

平行四边形的对边相等；

平行四边形的对角相等。

接下来研究平行四边形的对角线。

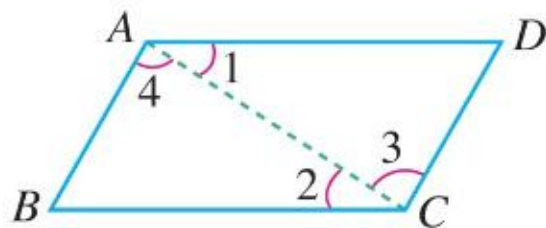


图 21.2-4

不添加辅助线，你能否直接运用平行四边形的定义，证明其对角相等呢？

探究

如图 21.2-5，在 $\square ABCD$ 中，连接 AC, BD ，并设它们相交于点 O 。点 O 把每条对角线都分成两部分，这两部分有什么关系？

利用信息技术工具，改变 $\square ABCD$ 的形状，你发现的结论还成立吗？证明你发现的结论。

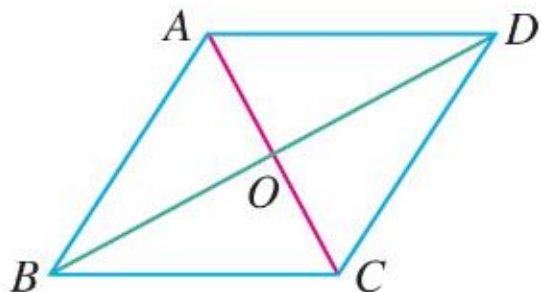


图 21.2-5

容易发现, 在 $\square ABCD$ 中, $OA = OC$, $OB = OD$. 这个结论也可以通过三角形全等证明 (请你结合图 21.2-6 完成证明).

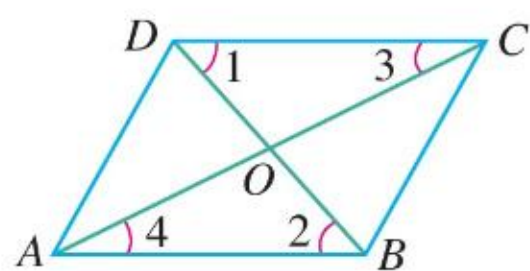


图 21.2-6

由此又得到平行四边形的一个性质:

平行四边形的对角线互相平分.

例 1 如图 21.2-7, $\square ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , $AB = 10$, $AD = 8$, $AC \perp BC$. 求 BC , CD , AC , OA 的长, 以及 $\square ABCD$ 的面积.

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore BC = AD = 8, CD = AB = 10.$$

$$\because AC \perp BC,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$$

$$\therefore OA = OC = \frac{1}{2}AC = 3,$$

$$S_{\square ABCD} = BC \cdot AC = 8 \times 6 = 48.$$

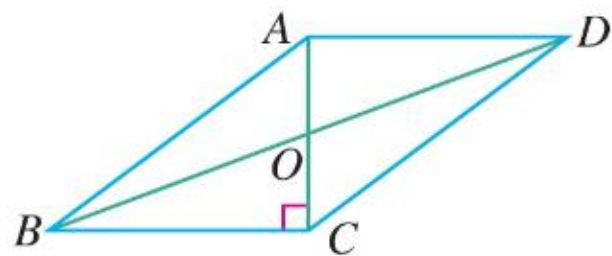


图 21.2-7

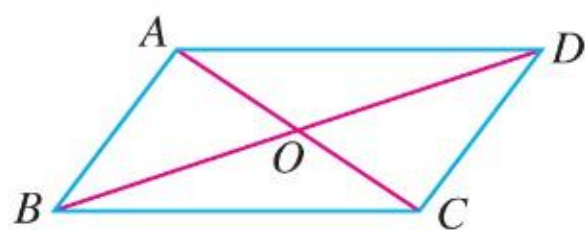
练习

1. 在 $\square ABCD$ 中,

(1) 已知 $AB = 5$, $BC = 3$, 求另外两边的长;

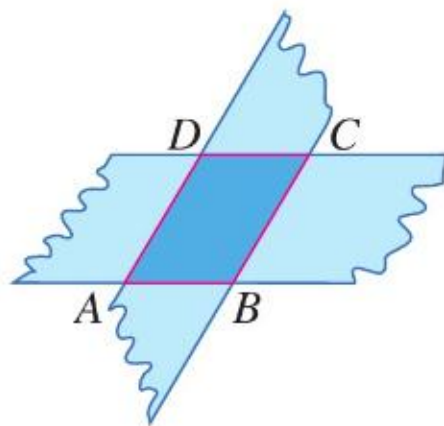
(2) 已知 $\angle A = 38^\circ$, 求其余各内角的度数.

2. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , $BC = 10$, $AC = 8$, $BD = 14$. $\triangle AOD$ 的周长是多少? $\triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 的周长哪个长? 长多少?



(第 2 题)

3. 如图, 将两张对边平行的纸条交叉叠放在一起, 重合的部分构成了一个四边形. 转动其中一张纸条, 线段 AD 和 BC 的长度有什么关系? 为什么?



(第 3 题)

例 2 如图 21.2-8, $\square ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , EF 过点 O 且与 AB , CD 分别相交于点 E , F . 求证 $OE=OF$.

证明: 在 $\square ABCD$ 中, $AB \parallel CD$,
 $\therefore \angle EAO = \angle FCO$, $\angle AEO = \angle CFO$.
 又 $OA = OC$,
 $\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$.
 $\therefore OE = OF$.

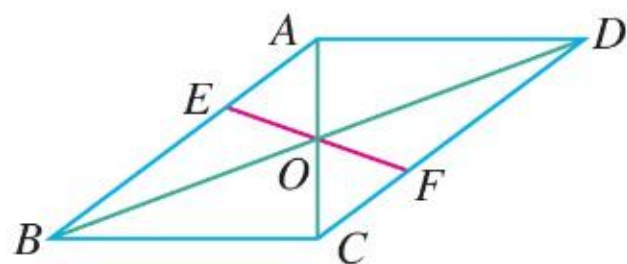


图 21.2-8

距离是几何中的重要度量之一. 我们已经学习了点与点之间的距离、点到直线的距离, 在此基础上, 我们结合平行四边形的概念和性质, 学习两条平行线之间的距离.

如图 21.2-9, $a \parallel b$, $c \parallel d$, c , d 与 a , b 分别相交于 A , B , C , D 四点. 由平行四边形的概念和性质可知, 四边形 $ABDC$ 是平行四边形, $AB = CD$. 也就是说, 夹在两条平行线之间的任何两条平行线段都相等.

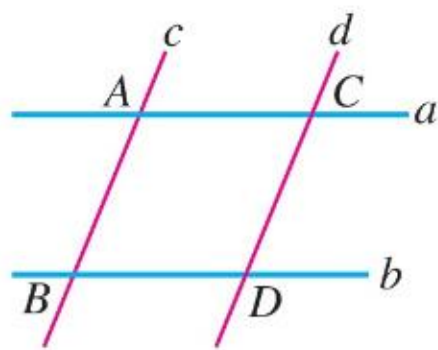


图 21.2-9

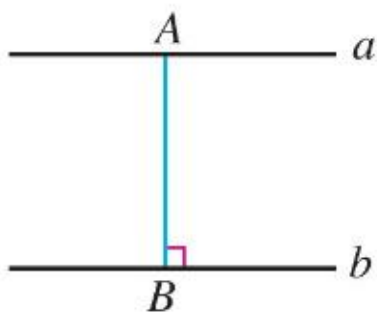


图 21.2-10

两条平行线之间的距离和点与点之间的距离、点到直线的距离有何联系与区别?

从上面的结论可以知道, 如果两条直线平行, 那么一条直线上所有的点到另一条直线的距离都相等. 两条平行线中, 一条直线上任意一点到另一条直线的距离, 叫作这**两条平行线之间的距离**. 如图 21.2-10, $a \parallel b$, A 是 a 上的任意一点, $AB \perp b$, 垂足为 B , 线段 AB 的长就是平行线 a , b 之间的距离.

例 3 如图 21.2-11, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC$. 求证 $\angle B = \angle C$.

分析: 由于 $AD \parallel BC$, 可以考虑运用平行线之间的距离, 通过三角形全等进行证明.

证明: 如图 21.2-11, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 过点 A , D 分别作 $AE \perp BC$, $DF \perp BC$, 垂足分别为 E , F .

$\therefore AE$, DF 的长都是平行线 AD , BC 之间的距离,

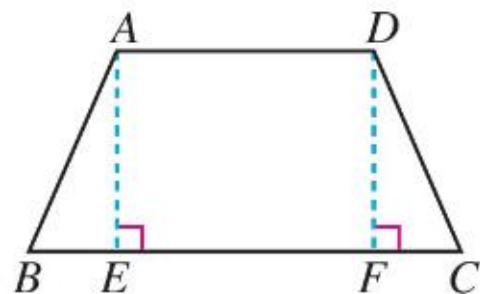


图 21.2-11

$$\therefore AE = DF.$$

$$\text{又 } AB = DC,$$

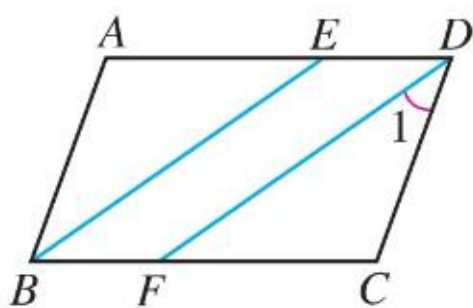
$$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle DCF.$$

$$\therefore \angle B = \angle C.$$

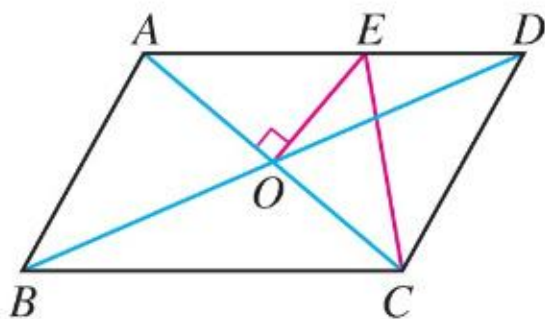
你还有其他证明方法吗?

练习

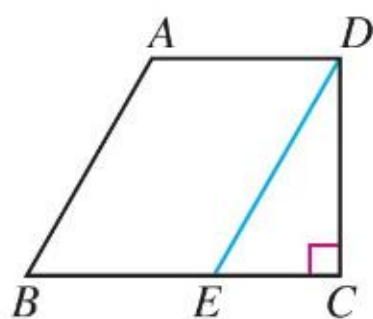
1. 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\angle ABC = 70^\circ$, BE 平分 $\angle ABC$ 且与 AD 相交于点 E , $DF \parallel EB$ 且与 BC 相交于点 F . 求 $\angle 1$ 的大小.



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

2. 如图, $\square ABCD$ 的周长为 16, 对角线 AC , BD 相交于点 O , 点 E 在 AD 上, $OE \perp AC$. 求 $\triangle CDE$ 的周长.
3. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle C = 90^\circ$, $AD = 3$, $AB = 4$, $BC = 5$, E 为边 BC 上一点, $AB \parallel DE$. 求 AD , BC 之间的距离.

21.2.2 平行四边形的判定

讨论平行四边形的判定, 就是确定当四边形的边、角、对角线满足怎样的位置关系和数量关系时, 它是平行四边形. 根据平行四边形的定义, 可以从边的位置关系的角度来判定. 还有其他判定平行四边形的方法吗?

思考

我们知道, 平行四边形的对边相等、对角相等、对角线互相平分. 反过来, 对边相等, 或对角相等, 或对角线互相平分的四边形是平行四边形吗? 也就是说, 平行四边形的性质定理的逆命题成立吗?

可以证明, 这些逆命题都成立.

下面以“对角线互相平分的四边形是平行四边形”为例, 根据平行四边形的定义进行证明.

如图 21.2-12, 在四边形 $ABCD$ 中, AC, BD 相交于点 O , 且 $OA=OC$, $OB=OD$. 求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明: $\because OA=OC, OB=OD, \angle AOB=\angle COD$,

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$.

$\therefore \angle OAB = \angle OCD$.

$\therefore AB \parallel CD$.

同理 $AD \parallel BC$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

于是得到平行四边形如下的判定定理:

两组对边分别相等的四边形是平行四边形;

两组对角分别相等的四边形是平行四边形;

对角线互相平分的四边形是平行四边形.

例 4 如图 21.2-13, $\square ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , 点 E, F 在 AC 上, 并且 $AE=CF$. 求证: 四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AO=CO, BO=DO$.

$\because AE=CF$,

$\therefore AO-AE=CO-CF$, 即 $EO=FO$.

又 $BO=DO$,

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

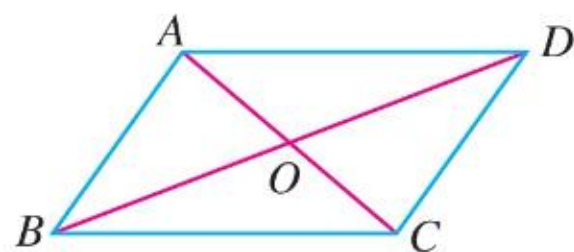


图 21.2-12

平行四边形的判定定理与相应的性质定理的条件和结论正好互换, 它们互为逆定理.

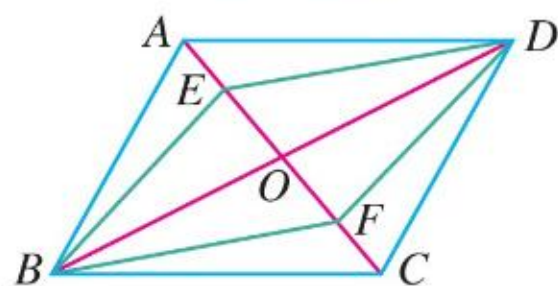
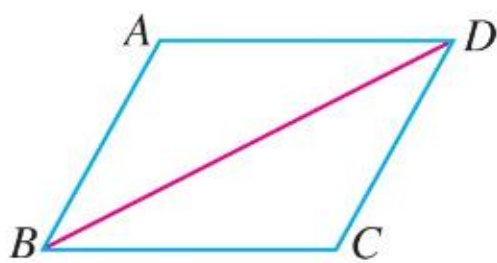


图 21.2-13

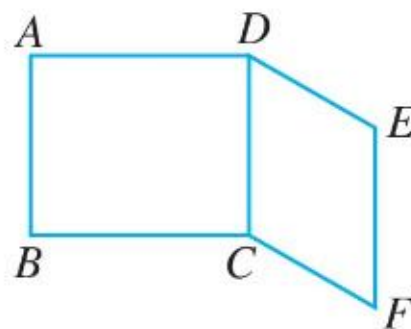
你还有其他证明方法吗?

练习

- 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADB = \angle CBD$, $\angle C + \angle ABC = 180^\circ$, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形吗? 请说明理由.



(第 1 题)

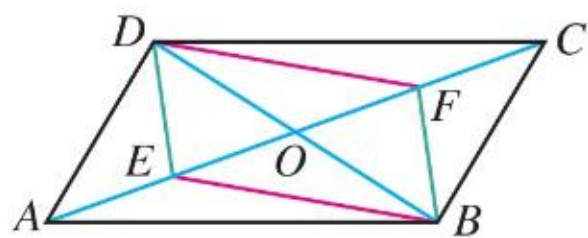


(第 2 题)

2. 如图, $AB = DC = EF$, $AD = BC$, $DE = CF$.

图中有哪些互相平行的线段?

3. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , 且 E , F 分别是 OA , OC 的中点, 连接 DE , DF , BE , BF . 求证: 四边形 $DEBF$ 是平行四边形.



(第3题)

根据平行四边形的定义和它的判定定理可知, 两组对边分别平行或相等的四边形是平行四边形. 如果只考虑四边形的一组对边, 那么它们满足什么条件时这个四边形是平行四边形呢?

思考

对于平行四边形的一组对边, 从它们的位置关系和数量关系考虑, 你能得到什么结论? 类似于前面利用平行四边形的性质发现平行四边形的判定, 你能得到利用一组对边判定一个四边形是平行四边形的方法吗?

如果一个四边形是平行四边形, 那么它的任意一组对边平行且相等. 进而猜想: 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

这个猜想是正确的, 可以通过证明四边形的另一组对边平行或相等来完成. 下面证明这个四边形的另外一组对边相等, 从而证明这个四边形是平行四边形.

如图 21.2-14, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \underline{\underline{CD}}$. 求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明: 连接 AC .

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2.$$

$$\text{又 } AB = CD, AC = CA,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA.$$

$$\therefore BC = DA.$$

$$\text{又 } AB = CD,$$

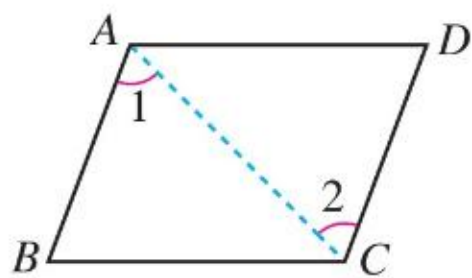


图 21.2-14

“ $\underline{\underline{}}$ ”表示平行且相等.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

于是又得到平行四边形的一个判定定理:

一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

例 5 如图 21.2-15, 在 $\square ABCD$ 中, E, F 分别是 AB, CD 的中点. 求证 $DE \parallel BF$.

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD$.

又 $EB = \frac{1}{2}AB, DF = \frac{1}{2}CD$,

$\therefore EB \parallel DF$.

$\therefore$ 四边形 $EBFD$ 是平行四边形.

$\therefore DE \parallel BF$.

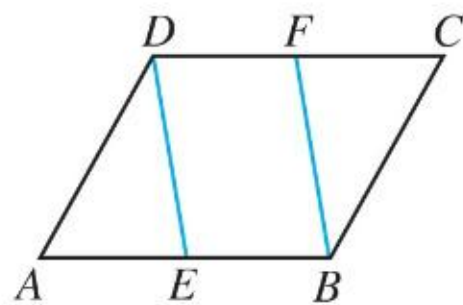


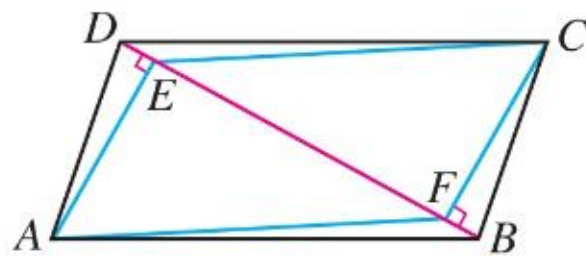
图 21.2-15

练习

1. 如图, 为了保证铁路的两条直铺的铁轨互相平行, 只要使互相平行的夹在铁轨之间的枕木长相等就可以了. 你能说出其中的道理吗?



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, BD 是它的一条对角线, 过 A, C 两点分别作 $AE \perp BD, CF \perp BD$, 垂足分别为 E, F . 求证: 四边形 $AFCE$ 是平行四边形.
3. 如图, 由六个全等的正三角形拼成的图形中, 有多少个平行四边形? 为什么?



(第 3 题)

21.2.3 三角形的中位线

前面我们研究平行四边形时，常常把它分成几个三角形，利用三角形全等研究平行四边形的有关问题，下面利用平行四边形研究三角形的有关问题。

如图 21.2-16，在 $\triangle ABC$ 中， D ， E 分别是边 AB ， AC 的中点，连接 DE 。像 DE 这样，连接三角形两边中点的线段叫作三角形的**中位线**。

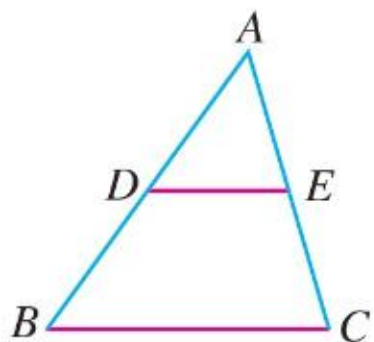


图 21.2-16

一个三角形有几条中位线？三角形的中位线和中线一样吗？

探究

观察图 21.2-16，你能发现 $\triangle ABC$ 的中位线 DE 与边 BC 的位置关系吗？度量一下， DE 与 BC 之间有什么数量关系？你能证明你发现的结论吗？

我们猜想： $DE \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2}BC$ 。下面对它们进行证明。

如图 21.2-16， D ， E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB ， AC 的中点。求证： $DE \parallel BC$ ，且 $DE = \frac{1}{2}BC$ 。

分析：我们既要证明两条线段所在的直线平行，又要证明其中一条线段的长等于另一条线段长的一半。

如图 21.2-17，将 DE 延长一倍（得到点 F ）后，可以将证明 $DE \parallel BC$ ，且 $DE = \frac{1}{2}BC$ 转化为证明 $DF \parallel BC$ ，而这只要证明以 B ， C ， F ， D 为顶点的四边形是平行四边形，进而只要证明四边形 $ADCF$ 是平行四边形。由于 $DE = EF$ ， E 是 AC 的中点，所以四边形 $ADCF$ 是平行四边形可以利用“对角线互相平分的四边形是平行四边形”证明。

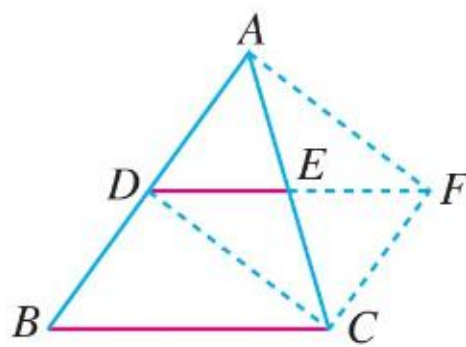


图 21.2-17

证明：如图 21.2-17，延长 DE 到点 F ，使 $EF=DE$ ，连接 FC ， DC ， AF 。

$$\because AE=EC, DE=EF,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形。

$$\therefore CF \parallel DA.$$

又 D 是 AB 的中点，

$$\therefore CF \parallel BD.$$

$\therefore$ 四边形 $DBCF$ 是平行四边形。

$$\therefore DF \parallel BC.$$

$$\text{又 } DE = \frac{1}{2}DF,$$

$$\therefore DE \parallel BC, \text{ 且 } DE = \frac{1}{2}BC.$$

通过上述证明，得到三角形的中位线定理：

三角形的中位线平行于三角形的第三边，并且等于第三边的一半。

例 6 求证：顺次连接四边形各边的中点，所得的四边形是平行四边形。

已知：如图 21.2-18，在四边形 $ABCD$ 中， E ， F ， G ， H 分别是边 AB ， BC ， CD ， DA 的中点。

求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形。

分析：题目中给出了四边形各边中点，可以连接四边形的一条对角线，利用三角形中位线定理证明要证的四边形一组对边平行且相等，从而证明它是平行四边形。

证明：连接 AC 。

$$\because AH=HD, CG=GD,$$

$$\therefore HG \parallel AC, \text{ 且 } HG = \frac{1}{2}AC.$$

$$\text{同理 } EF \parallel AC, \text{ 且 } EF = \frac{1}{2}AC.$$

$$\therefore HG \parallel EF.$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形。

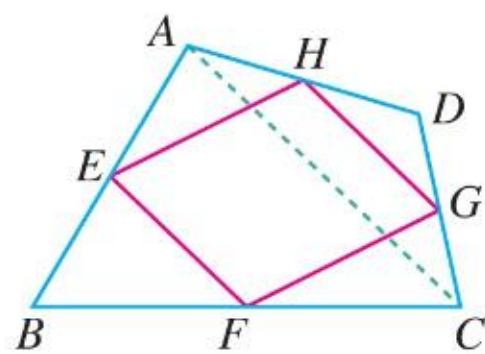
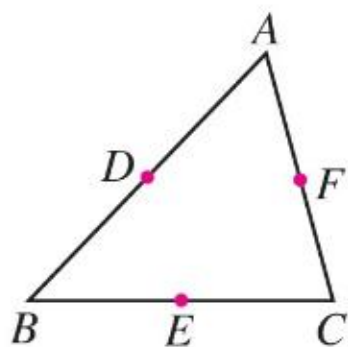


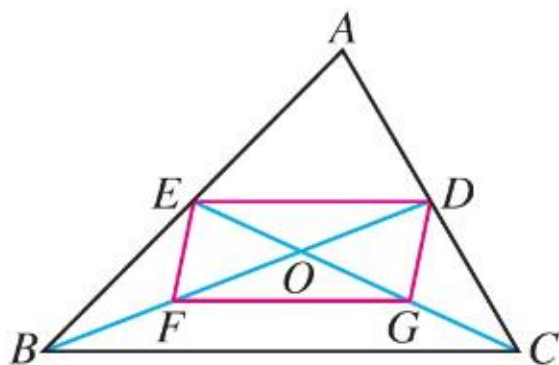
图 21.2-18

练习

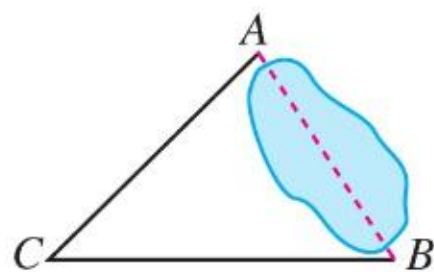
1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别是 AB, BC, CA 的中点. 以这些点为顶点, 在图中, 你能画出多少个平行四边形? 为什么它们是平行四边形?



(第1题)



(第2题)



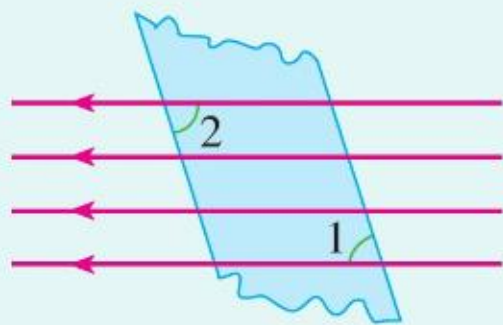
(第3题)

2. 如图, $\triangle ABC$ 的中线 BD, CE 相交于点 O , 且 F, G 分别是 OB, OC 的中点. 求证: 四边形 $DEFG$ 是平行四边形.
3. 如图, A, B 两点被池塘隔开, 在 AB 外选一点 C , 连接 AC 和 BC . 怎样利用三角形的中位线定理测出 A, B 两点间的距离?

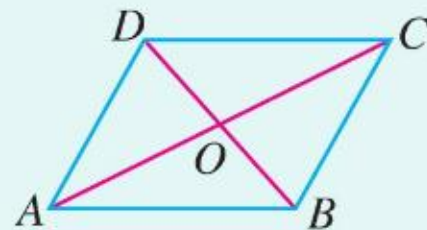
习题 21.2

复习巩固

1. 如果四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AB=6$, 且 AB 的长是 $\square ABCD$ 周长的 $\frac{3}{16}$, 那么 BC 的长是多少?
2. 如图, 在一束平行光线中插入一张对边平行的纸板. 如果光线与纸板右下方所成的 $\angle 1$ 是 $72^\circ 15'$, 那么光线与纸板左上方所成的 $\angle 2$ 是多少度? 为什么?



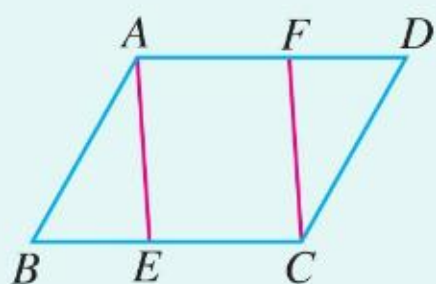
(第2题)



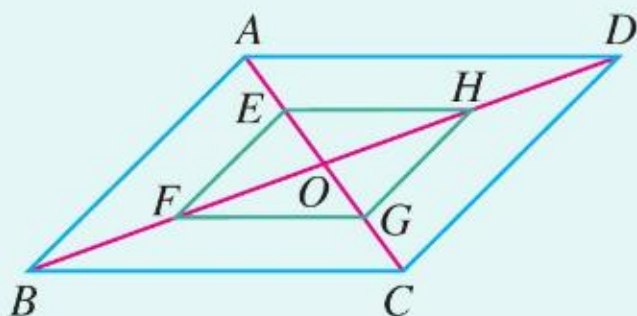
(第3题)

3. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , 且 $AC+BD=36$, $AB=11$. 求 $\triangle OCD$ 的周长.
4. 在 $\square ABCD$ 中, $\angle A=45^\circ$, $AB=4$, $AD=2$. 求 $\square ABCD$ 的面积.

5. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E, F 分别在 BC, AD 上, 且 $AF=CE$. 求证: 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

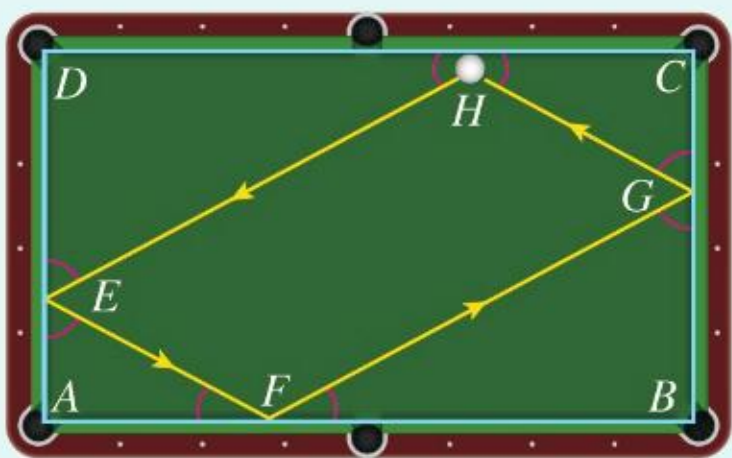


(第 5 题)

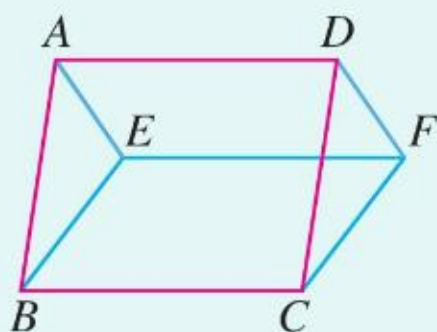


(第 6 题)

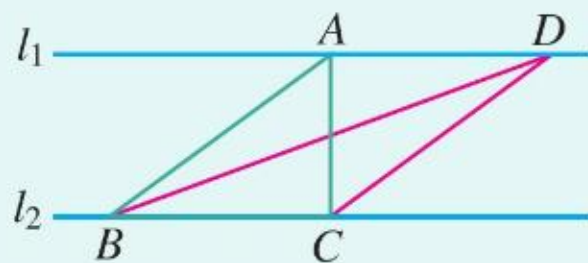
6. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , 且 E, F, G, H 分别是 AO, BO, CO, DO 的中点. 求证: 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.
7. 如图, 在长方形台球桌面上击球, 得到球的运动轨迹恰好为四边形 $EFGH$. 当台球每次撞击一条桌边时, 入射方向与这条桌边的夹角等于反弹方向与这条桌边的夹角, 如 $\angle DEH = \angle AEF$, 则四边形 $EFGH$ 是平行四边形吗? 为什么?



(第 7 题)



(第 8 题)

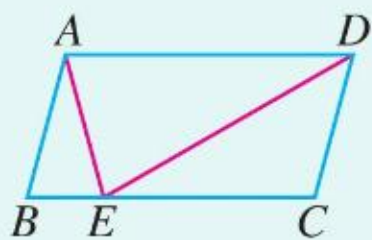


(第 9 题)

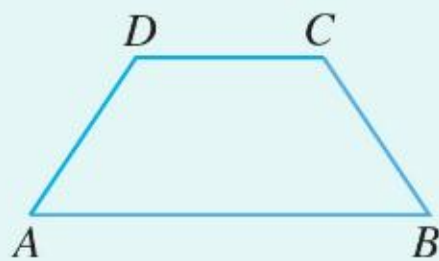
8. 如图, 四边形 $AEFD$ 和四边形 $EBCF$ 都是平行四边形. 求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.
9. 如图, 直线 $l_1 \parallel l_2$, $\triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 的面积相等吗? 为什么? 你还能画出一些与 $\triangle ABC$ 面积相等的三角形吗?

综合运用

10. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E 在 BC 上, $\angle ADE = 30^\circ$, EA 平分 $\angle BED$, $DE = 8$. 求 $\triangle ADE$ 的面积.



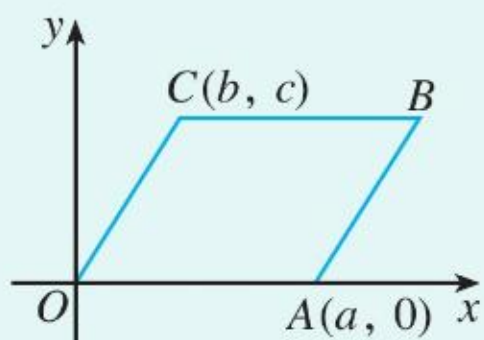
(第 10 题)



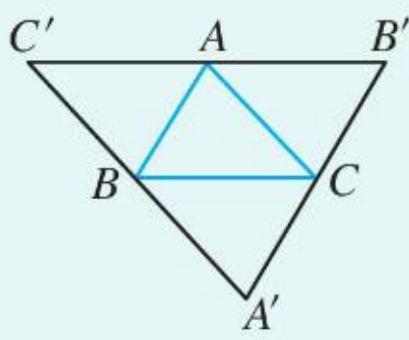
(第 11 题)

11. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $\angle A = \angle B$. 求证 $AD = BC$.

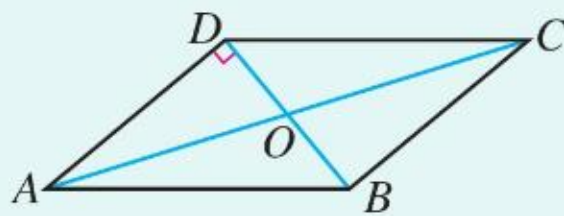
12. 如图, $\square OABC$ 的顶点 O, A, C 的坐标分别是 $(0, 0), (a, 0), (b, c)$. 求顶点 B 的坐标.



(第 12 题)



(第 13 题)



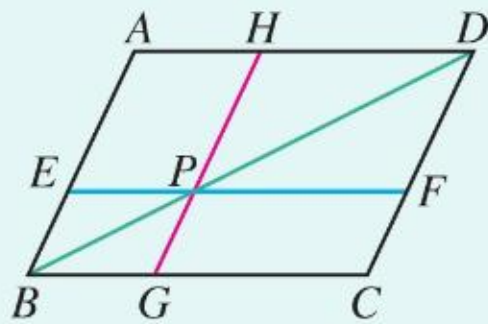
(第 14 题)

13. 如图, 已知 $\triangle ABC$, 过点 A, B, C 分别作 $B'C' \parallel CB, C'A' \parallel AC, A'B' \parallel BA$, 那么 $\angle ABC$ 与 $\angle B'$ 有什么关系? 线段 AB' 与线段 AC' 呢? 为什么?

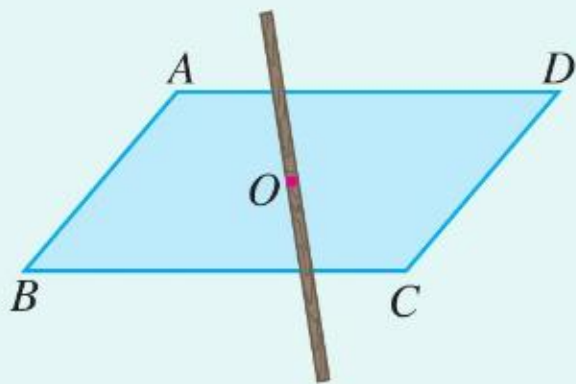
14. 如图, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 $O, AD=12, DO=OB=5, AC=26, \angle ADB=90^\circ$. 求 BC 的长和四边形 $ABCD$ 的面积.

拓展探索

15. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 过对角线 BD 上一点 P 作 $EF \parallel BC, GH \parallel AB$. 图中哪两个平行四边形面积相等? 为什么?



(第 15 题)



(第 16 题)

16. 如图, 用硬纸板剪一个平行四边形, 找出它的对角线的交点 O , 把一根细直木条平放在硬纸板上, 用大头针固定在点 O 处, 并使细木条可以绕点 O 随意转动. 拨动细木条, 让它转动后停止. 观察若干次拨动的结果, 你能发现什么结论? 证明你的发现.
17. 求证: 平行四边形两条对角线长的平方和等于四条边长的平方和.

21.3 特殊的平行四边形

上一节我们研究了平行四边形，当平行四边形的角、边满足某些特殊条件时，就得到特殊的平行四边形. 本节就来研究这些特殊的平行四边形.

21.3.1 矩形

先来看角满足特殊条件的平行四边形. 如图 21.3-1，当平行四边形的一个角为直角时，这时的平行四边形是特殊的平行四边形. 有一个角是直角的平行四边形叫作**矩形** (rectangle)，矩形也就是长方形.



图 21.3-1

矩形也是常见的几何图形. 门窗框、书桌面、地砖等 (图 21.3-2) 都有矩形的形象. 你还能举出一些例子吗?



图 21.3-2

与研究平行四边形一样，对于矩形，仍重点研究它的性质和判定.

思考

因为矩形是平行四边形，所以它具有平行四边形的所有性质. 但由于它有一个角为直角，它是否具有一般平行四边形不具有的一些特殊性质呢?

与研究平行四边形的性质类似，对于矩形，我们仍然从它的边、角、对角线出发进行研究. 可以发现并证明 (请你自己完成证明)，矩形还有以下性质：

矩形的四个角都是直角；

矩形的对角线相等.

另外，容易发现，矩形是轴对称图形，它每组对边中点连线所在的直线就是它的对称轴.

例 1 如图 21.3-3，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ， $\angle AOB = 60^\circ$ ， $AB = 4$. 求矩形 $ABCD$ 的对角线的长.

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AC$ 与 BD 相等且互相平分.

$\therefore OA = OB$.

又 $\angle AOB = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle OAB$ 是等边三角形.

$\therefore OA = AB = 4$.

$\therefore AC = BD = 2OA = 8$.

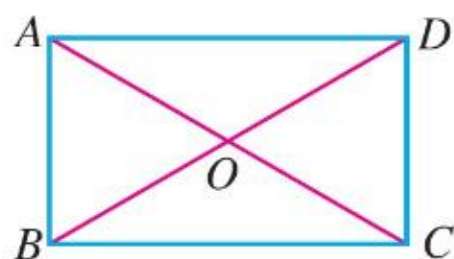


图 21.3-3

上一节我们运用平行四边形的判定和性质研究了三角形的中位线，下面利用矩形的性质研究直角三角形的一个性质.

思考

如图 21.3-4， BO 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AC 上的中线， BO 与 AC 有什么关系？你能证明你发现的结论吗？

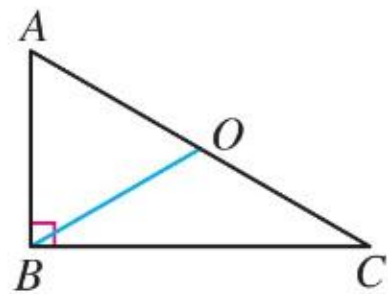


图 21.3-4

可以发现 $BO = \frac{1}{2}AC$. 下面对它进行证明.

类似于证明三角形中位线定理的过程，如图 21.3-5，延长 BO 到点 D ，使 $OD = OB$ ，连接 AD ， CD ，则四边形 $ABCD$ 是矩形（想一想为什么）.

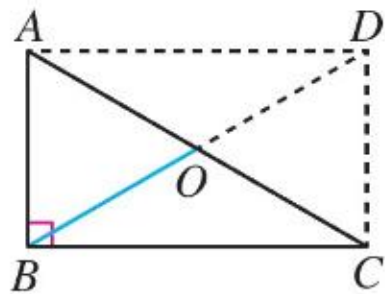


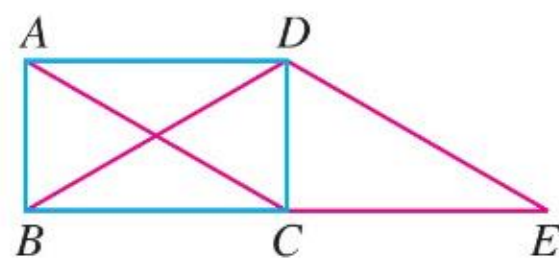
图 21.3-5

根据矩形的性质， $BD = AC$. 所以 $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC$. 由此得到直角三角形的一个性质：

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

练习

1. 一个矩形的一条对角线长为 8，两条对角线相交所成的角中有一个为 120° ，求这个矩形相邻两边的长。
2. 如图，四边形 $ABCD$ 是矩形，点 E 在 BC 的延长线上， $DE \parallel AC$ ， $\triangle DBE$ 是等腰三角形吗？试说明理由。



(第 2 题)

接下来研究矩形的判定. 由矩形的定义可知，有一个角是直角的平行四边形是矩形. 除了此方法，还有没有其他判定方法呢？

与研究平行四边形的判定类似，我们研究矩形的性质定理的逆命题，看一看它们是否成立.

思考

我们知道，矩形是对角线相等的平行四边形. 反过来，对角线相等的平行四边形是矩形吗？

如图 21.3-6，由 $\square ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相等，再根据 $AB=DC$ ， $BC=CB$ ，可以证明 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ ，从而 $\angle ABC = \angle DCB$ ，又 $\angle ABC$ 与 $\angle DCB$ 互补，所以它们都是直角. 这样，就证明了 $\square ABCD$ 是矩形. 由此得到矩形的一个判定定理：

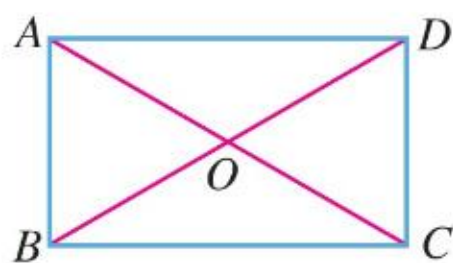


图 21.3-6

对角线相等的平行四边形是矩形.

工人师傅在做矩形门窗或零件时，为了确保它们的形状是矩形，不仅要测量它们的两组对边是否分别相等，还要测量它们的两条对角线是否相等. 你知道其中的道理吗？

思考

我们知道，矩形是四个角都是直角的四边形，它的逆命题成立吗？即四个角都是直角的四边形是矩形吗？进一步，至少有几个角是直角的四边形是矩形？

可以发现并证明（请你自己完成证明）矩形的另一个判定定理：

有三个角是直角的四边形是矩形。

例 2 如图 21.3-7, $\square ABCD$ 的四个内角的平分线分别相交于点 E, F, G, H . 求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.

分析： 根据已知条件，容易证明四边形 $EFGH$ 的一个内角 $\angle F$ 为直角，同理可证 $\angle H, \angle AEB$ 也为直角，从而证明四边形 $EFGH$ 是矩形.

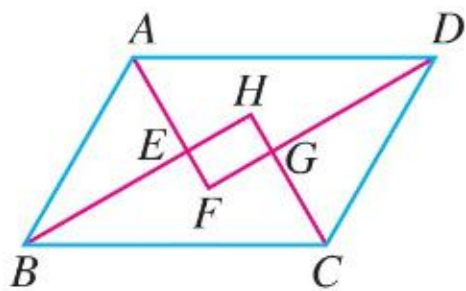


图 21.3-7

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB \parallel CD$.

$\therefore \angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$.

又 AF, DF 分别平分 $\angle BAD, \angle ADC$,

$$\begin{aligned}\therefore \angle DAF + \angle ADF &= \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle ADC = \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ADC) \\ &= 90^\circ.\end{aligned}$$

$\therefore \angle F = 90^\circ$.

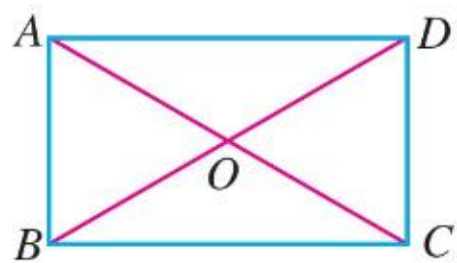
同理 $\angle H = \angle AEB = 90^\circ$.

$\therefore \angle FEH = \angle AEB = 90^\circ$.

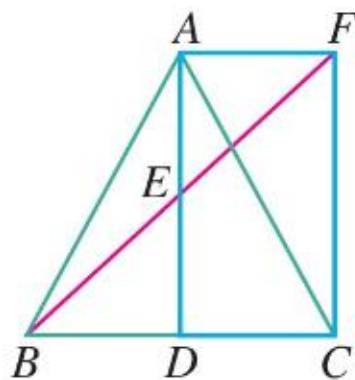
$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形.

练习

1. 求证：四个角都相等的四边形是矩形.
2. 如图， $\square ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O ， $\triangle OAB$ 是等边三角形，且 $AB = 2$. 求 $\square ABCD$ 的面积.
3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D, E 分别是线段 BC, AD 的中点，过点 A 作 $AF \parallel BC$ 交 BE 的延长线于点 F ，连接 CF . 求证：四边形 $ADCF$ 是矩形.



(第 2 题)



(第 3 题)

21.3.2 菱形

前面研究了角满足特殊条件的平行四边形——矩形，再来看边满足特殊条件的平行四边形.

如图 21.3-8，当平行四边形的一组邻边相等时，这时的平行四边形也是特殊的平行四边形. 有一组邻边相等的平行四边形叫作**菱形** (rhombus).



图 21.3-8

菱形也是常见的几何图形. 有些门窗的窗格、美丽的中国结、活动挂架 (图 21.3-9) 等都有菱形的形象. 你还能举出一些例子吗?



图 21.3-9

类似于对矩形的研究，我们重点研究菱形的性质和判定.

思考

因为菱形是平行四边形，所以它具有平行四边形的所有性质. 但由于它的一组邻边相等，它是否具有一般平行四边形不具有的一些特殊性质呢?

我们仍从菱形的边、角、对角线出发进行研究. 可以发现并证明 (请你自己完成证明)，菱形还具有以下性质：

菱形的四条边都相等；

菱形的两条对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角.

另外，容易发现，菱形是轴对称图形，它的每条对角线所在的直线就是它的对称轴.

如图 21.3-10，比较菱形的对角线和平行四边形的对角线，可以发现，菱

形的两条对角线把菱形分成四个全等的直角三角形，而平行四边形一般只被分成两对全等的三角形。

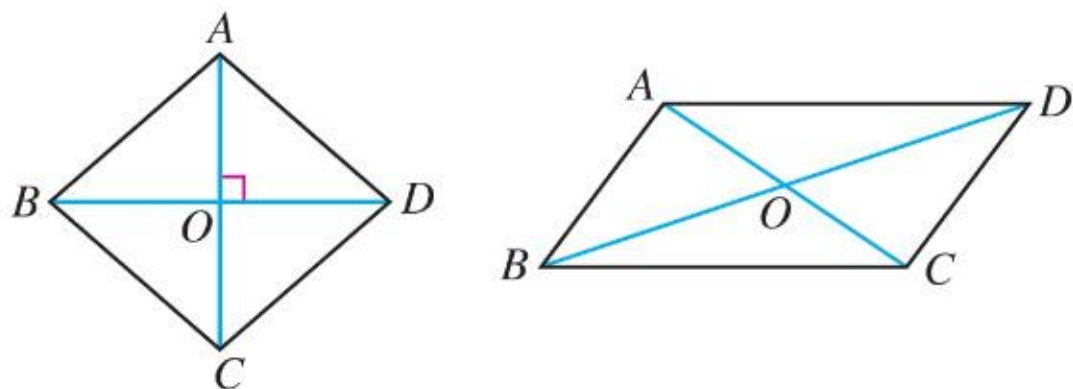


图 21.3-10

由菱形两条对角线的长，你能求出它的面积吗？

例 3 如图 21.3-11，菱形花坛 ABCD 的边长为 20 m， $\angle ABC = 60^\circ$ ，沿着菱形的对角线修建了两条小路 AC 和 BD. 求两条小路的长（结果保留小数点后两位）和花坛的面积（结果保留小数点后一位）。

解： 设 AC，BD 相交于点 O.

$\because$ 花坛 ABCD 的形状是菱形，

$$\therefore AC \perp BD, \angle ABO = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ.$$

在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中，

$$AO = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 20 = 10,$$

$$BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3}.$$

$\therefore$ 花坛的两条小路长

$$AC = 2AO = 20 \text{ (m)}, BD = 2BO = 20\sqrt{3} \approx 34.64 \text{ (m)}.$$

花坛的面积

$$S_{\text{菱形}ABCD} = 4 \times S_{\triangle ABO} = 4 \times \frac{1}{2} AO \cdot BO = 200\sqrt{3} \approx 346.4 \text{ (m}^2\text{)}.$$

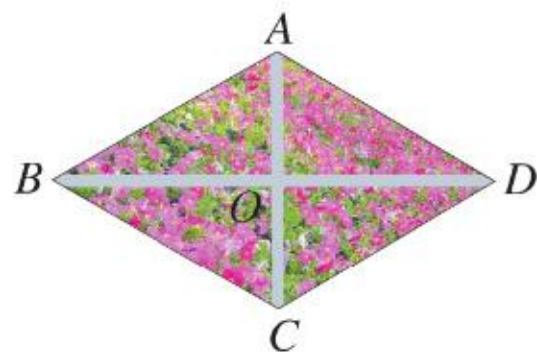
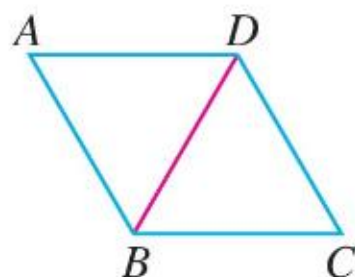


图 21.3-11

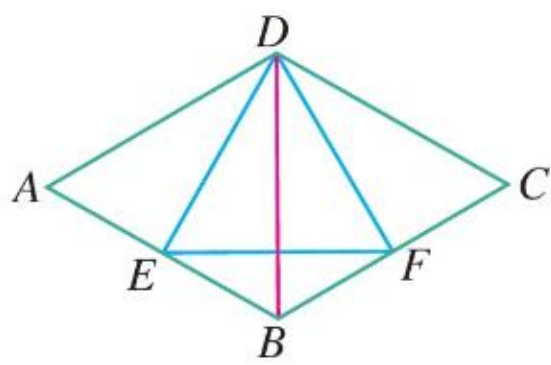
练习

1. 四边形 ABCD 是菱形，对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $AB = 5$ ， $AO = 4$. 求 AC，BD 的长以及菱形 ABCD 的面积.
2. 如图，在菱形 ABCD 中， $BD = 4$ ， $\angle A : \angle ABC = 1 : 2$. 求 $\triangle ABD$ 的周长.



(第 2 题)

3. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, 连接对角线 BD , E, F 分别是边 AB, BC 的中点, 分别连接 DE, DF, EF . 求证: $\triangle DEF$ 是等边三角形.



(第3题)

接下来研究菱形的判定. 由菱形的定义可知, 有一组邻边相等的平行四边形是菱形. 除了此方法, 还有没有其他判定方法呢?

与研究平行四边形、矩形的判定类似, 我们研究菱形的性质定理的逆命题, 看一看它们是否成立.

思考

我们知道, 菱形是对角线互相垂直的平行四边形. 反过来, 对角线互相垂直的平行四边形是菱形吗?

同样地, 菱形是四条边相等的四边形. 反过来, 四条边相等的四边形是菱形吗?

可以发现并证明 (请你自己完成证明) 菱形的判定定理:

对角线互相垂直的平行四边形是菱形;

四条边相等的四边形是菱形.

例 4 如图 21.3-12, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 的垂直平分线与边 AD, BC 分别相交于点 E, F . 求证: 四边形 $AFCE$ 是菱形.

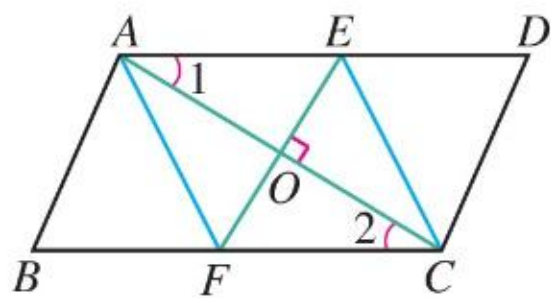


图 21.3-12

分析: 已知 $AC \perp EF$, 由“对角线互相垂直的平行四边形是菱形”, 只需证明四边形 $AFCE$ 是平行四边形. 由题意可知 $AO = CO$, 还需证明 $EO = FO$.

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AE \parallel CF$.

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

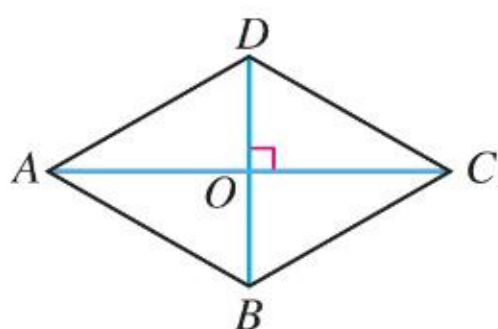
又 $\angle AOE = \angle COF$, $AO = CO$,

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$.
 $\therefore EO = FO$.
 $\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形.
 又 $AC \perp EF$,
 $\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是菱形.

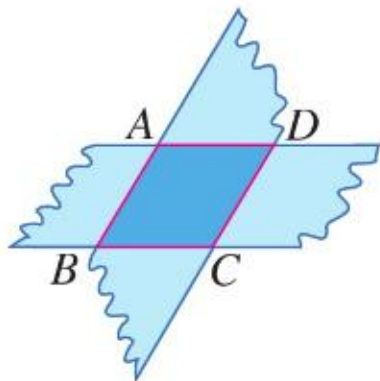
你能利用“四条边相等的四边形是菱形”证明这个例题吗？

练习

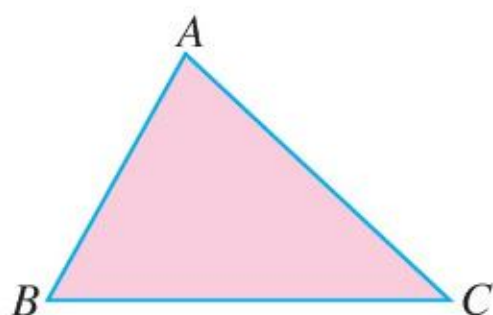
1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC , BD 相交于点 O 且互相垂直平分. 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形.



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

2. 如图，两张对边平行且等宽的纸条交叉叠放在一起，重合部分构成的四边形 $ABCD$ 是一个菱形吗？为什么？
3. 一张三角形纸片如图所示，请你用纸片折出一个菱形，使 $\angle A$ 是菱形的一个内角，和点 A 相对的顶点在边 BC 上，并说明所折图形是菱形的理由.

21.3.3 正方形

对于一个平行四边形，如果它不仅有一组邻边相等，而且有一个角是直角，那么它就是**正方形** (square). 正方形既是有一组邻边相等的矩形，也是有一个角是直角的菱形 (图 21.3-13).

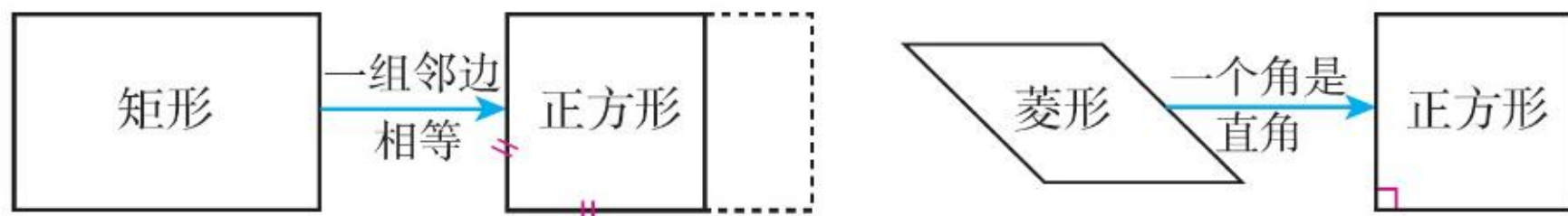


图 21.3-13

正方形既是特殊的平行四边形，也是特殊的矩形、菱形，因此它具有平行四边形、矩形、菱形的所有性质.

探究

从正方形的边、角、对角线和它的轴对称性出发，写出正方形的性质，并证明其中的一些结论.

例 5 求证：正方形的两条对角线把这个正方形分成四个全等的等腰直角三角形.

已知：如图 21.3-14，四边形 $ABCD$ 是正方形，对角线 AC ， BD 相交于点 O .

求证： $\triangle ABO$ ， $\triangle BCO$ ， $\triangle CDO$ ， $\triangle DAO$ 是全等的等腰直角三角形.

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AC=BD$ ， $AC \perp BD$.

$\therefore \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^\circ$ ，

$AO=BO=CO=DO$.

$\therefore \triangle ABO$ ， $\triangle BCO$ ， $\triangle CDO$ ， $\triangle DAO$ 都是等腰直角三角形，并且

$\triangle ABO \cong \triangle BCO \cong \triangle CDO \cong \triangle DAO$.

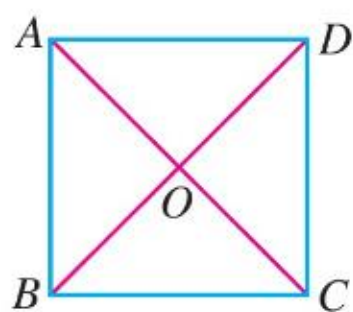


图 21.3-14

思考

正方形、菱形、矩形、平行四边形之间有什么关系？与同学讨论一下，并列表或画框图表示这些关系.

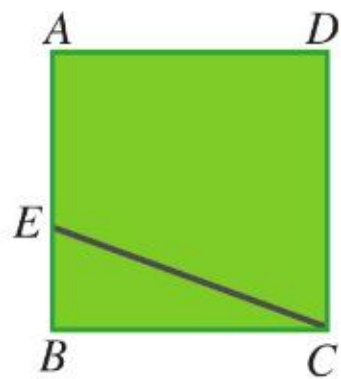
练习

- (1) 把一张矩形纸片按如图方式折一下，就可以裁出正方形纸片. 为什么？

(2) 如何从一块矩形木板中裁出一块面积最大的正方形木板呢？
- 如图，一块正方形场地的四个顶点分别是 A ， B ， C ， D . 李明和张华在边 AB 上取了一点 E ， $EC=30$ m， $EB=10$ m. 这块场地的面积和对角线长分别是多少？

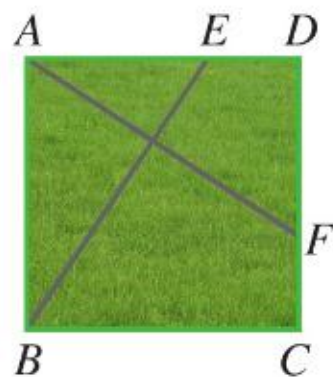


(第 1 题)



(第 2 题)

3. 如图, 一个正方形草坪的四个顶点分别是 A, B, C, D . 要修建 BE 和 AF 两条路, 使点 E, F 分别在边 AD, CD 上, 且 $DE = CF$. 这两条路等长吗? 它们有什么位置关系? 为什么?



(第3题)

要判定一个四边形是正方形, 可以先判定它是矩形, 再判定这个矩形也是菱形; 或者先判定它是菱形, 再判定这个菱形也是矩形.

探究

分别从矩形、菱形、平行四边形、四边形出发, 写出正方形的判定方法, 并与同学交流你的结论.

例6 如图 21.3-15, E, F, G, H 分别是正方形 $ABCD$ 四条边上的点, 且 $AE = BF = CG = DH$. 求证: 四边形 $EFGH$ 是正方形.

分析: 要证明四边形 $EFGH$ 是正方形, 需证明它既是菱形, 也是矩形, 也就是要先证明它的四条边相等, 再证明它的一个角是直角, 而这可以由 $\triangle AEH, \triangle BFE, \triangle CGF, \triangle DHG$ 全等得出.

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = BC = CD = DA.$$

$$\text{又 } AE = BF = CG = DH,$$

$$\therefore EB = FC = GD = HA.$$

$$\because \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AEH \cong \triangle BFE \cong \triangle CGF \cong \triangle DHG.$$

$$\therefore HE = EF = FG = GH.$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形.

$$\because \triangle AEH \cong \triangle BFE,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3.$$

$$\text{又 } \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ.$$

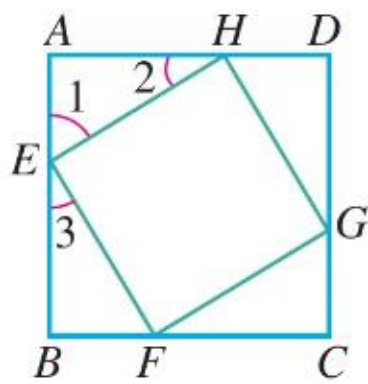


图 21.3-15

$$\therefore \angle HEF = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 3) = 90^\circ.$$

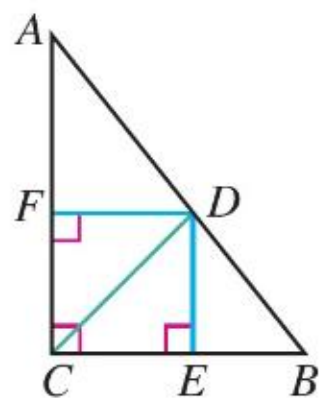
$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是正方形.

练习

1. 满足下列条件的四边形是不是正方形？为什么？

- (1) 对角线互相垂直且相等的平行四边形；
- (2) 对角线互相垂直的矩形；
- (3) 对角线相等的菱形；
- (4) 对角线互相垂直平分且相等的四边形.

2. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 平分 $\angle ACB$ ， $DE \perp BC$ ， $DF \perp AC$ ，垂足分别为 E ， F . 求证：四边形 $CEDF$ 是正方形.



(第2题)



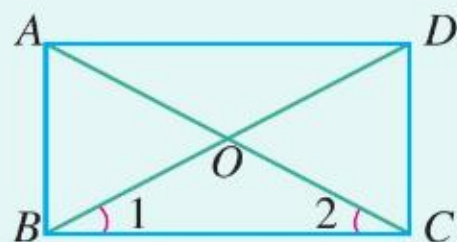
(第3题)

3. 王芳在商场看中一条丝巾，她不确定其是不是正方形样式，于是售货员拿起丝巾拉起一组对角把丝巾对折（如图所示），让王芳看丝巾是否完全重合；见她还有些犹豫，售货员又拉起另一组对角把丝巾对折，让她看丝巾是否也完全重合. 王芳发现这两次都重合，就买下了这条丝巾. 你认为王芳买的这条丝巾是正方形样式吗？为什么？

习题 21.3

复习巩固

1. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC ， BD 相交于点 O ，且 $\angle 1 = \angle 2$. 四边形 $ABCD$ 是矩形吗？为什么？



(第1题)

2. 如图, 一个木匠要制作一块矩形的木板. 他在一块对边平行的长木板上分别沿与长边垂直的方向锯了两次, 就能得到矩形木板. 为什么?



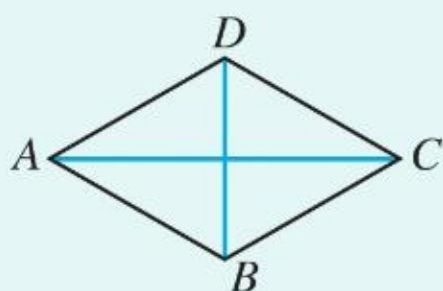
(第2题)

3. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 2AC$. 利用本节所学的直角三角形的性质, 求 $\angle A$, $\angle B$ 的度数.

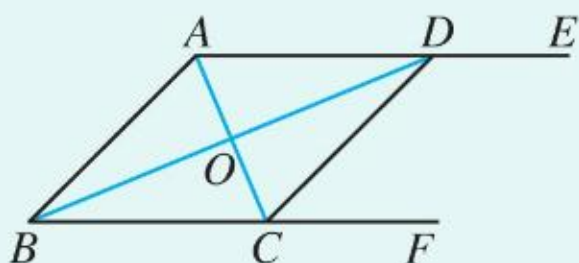
4. 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle ACD = 30^\circ$, $BD = 6$. 求:

(1) $\angle BAD$, $\angle ABC$ 的度数;

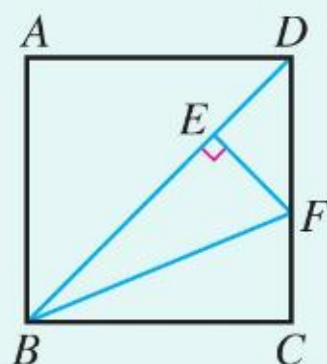
(2) AB , AC 的长.



(第4题)



(第5题)



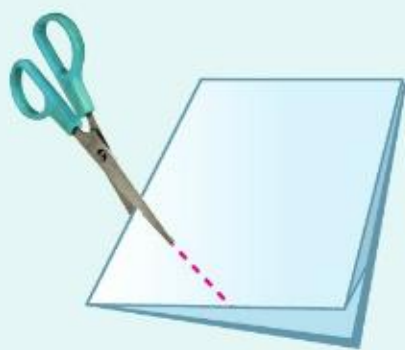
(第6题)

5. 如图, $AE \parallel BF$, AC 平分 $\angle BAE$, 且交 BF 于点 C , BD 平分 $\angle ABF$, 且交 AE 于点 D , 连接 CD . 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形.

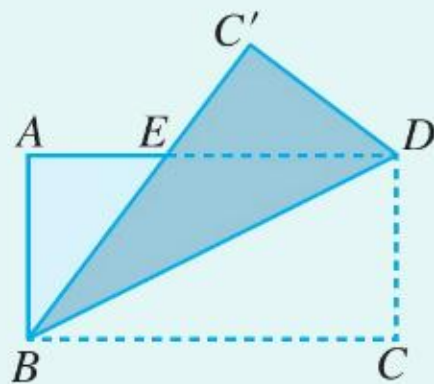
6. 如图, E 是正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上一点, 且 $BE = BC$, 过点 E 且与 BD 垂直的直线交 CD 于点 F , 连接 BF . DE 与 CF 相等吗? 说一说你的理由.

综合运用

7. 如图, 把一张矩形的纸片对折两次, 然后剪下一个角. 要得到一个正方形, 裁剪线与折痕应成多少度的角?



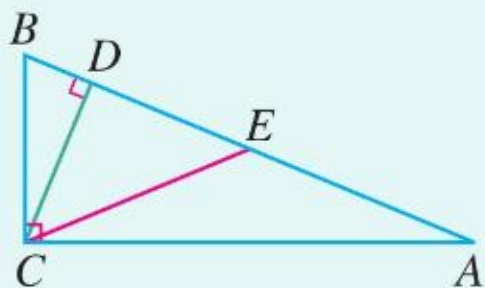
(第7题)



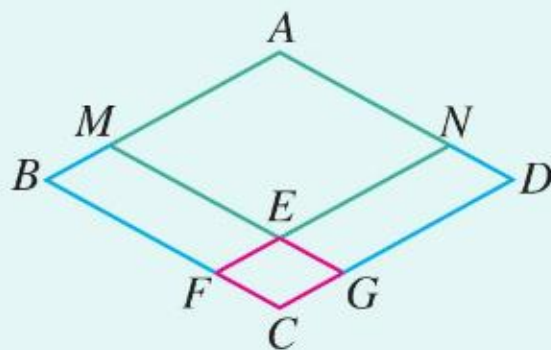
(第8题)

8. 如图, 将矩形纸片 $ABCD$ 沿直线 BD 折叠, 使点 C 落在 C' 处, BC' , AD 相交于点 E , $AD = 8 \text{ cm}$, $AB = 4 \text{ cm}$. DE 的长是多少? $\triangle BDE$ 的面积呢?

9. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$, 垂足为 D , $\angle ACD = 3\angle BCD$, E 是边 AB 的中点. $\angle ECD$ 是多少度? 为什么?

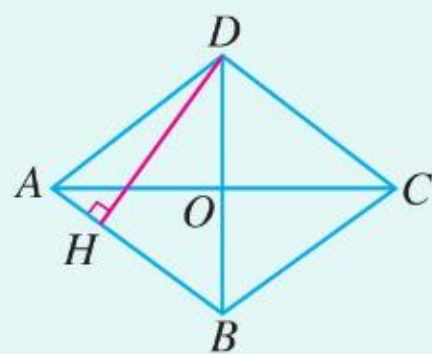


(第 9 题)



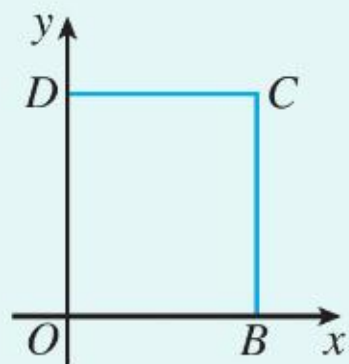
(第 10 题)

10. 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 点 M, N 分别在 AB, AD 上, 且 $BM = DN$, $MG \parallel AD$, $NF \parallel AB$; 点 F, G 分别在 BC, CD 上, MG 与 NF 相交于点 E . 求证: 四边形 $AMEN, EFCG$ 都是菱形.
11. 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 对角线 AC, BD 相交于点 O , $AC = 8$, $BD = 6$, $DH \perp AB$, 垂足为 H . 求 DH 的长.

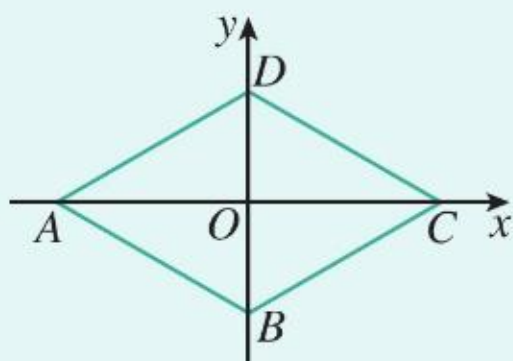


(第 11 题)

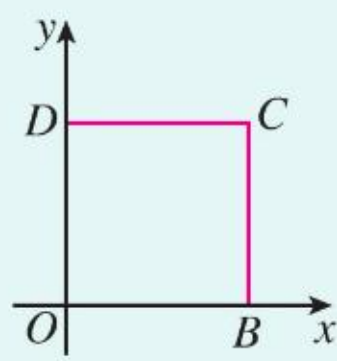
12. (1) 如图 (1), 四边形 $OBCD$ 是矩形, O, B, D 三点的坐标分别是 $(0, 0), (b, 0), (0, d)$. 求点 C 的坐标.
- (2) 如图 (2), 四边形 $ABCD$ 是菱形, C, D 两点的坐标分别是 $(c, 0), (0, d)$, 点 A, B 在坐标轴上. 求 A, B 两点的坐标.
- (3) 如图 (3), 四边形 $OBCD$ 是正方形, O, D 两点的坐标分别是 $(0, 0), (0, d)$. 求 B, C 两点的坐标.



(1)



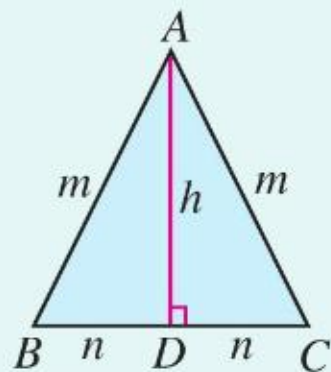
(2)



(3)

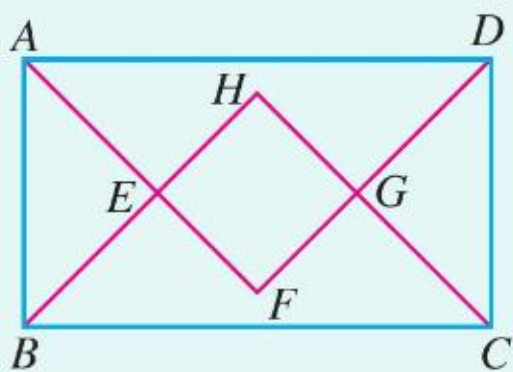
(第 12 题)

13. 如图, 将等腰三角形纸片 ABC 沿底边 BC 上的高 AD 剪成两个三角形. 用这两个三角形你能拼成多少种平行四边形? 试一试, 分别求出它们的对角线的长.



(第 13 题)

14. 如图, 矩形 $ABCD$ 的四个内角的平分线分别相交于点 E, F, G, H . 试判断四边形 $EFGH$ 的形状, 并证明你的结论.



(第 14 题)

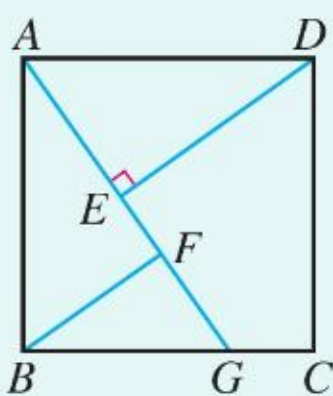


(第 15 题)

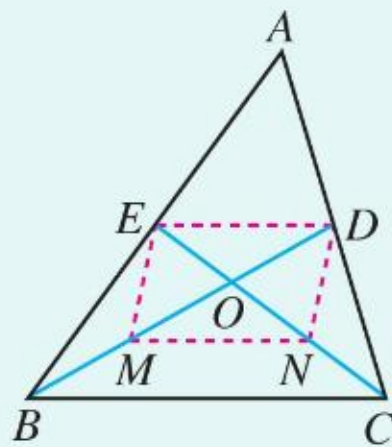
15. 如图, 一块正方形草地, 要在上面修建两条交叉的笔直小路, 使这两条小路将草地分成面积相等的四部分, 你有多少种方法? 与同学交流一下.

拓展探索

16. 如图, 四边形 $ABCD$ 是正方形. G 是边 BC 上任意一点, $DE \perp AG$, 垂足为 E ; $BF \parallel DE$, 交 AG 于点 F . 求证: $AF - BF = EF$.

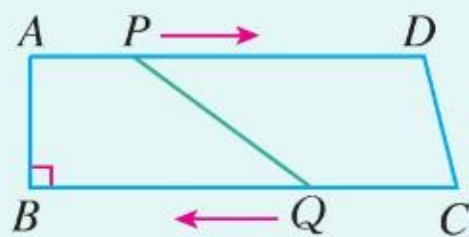


(第 16 题)



(第 17 题)

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BD, CE 分别是边 AC, AB 上的中线, BD 与 CE 相交于点 O . BO 与 OD 的长度有什么关系? BC 边上的中线是否一定过点 O ? 为什么? (提示: 分别作 BO, CO 的中点 M, N , 连接 ED, EM, MN, ND .)
18. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$, $AD = 24 \text{ cm}$, $BC = 26 \text{ cm}$. 点 P 从点 A 出发, 以 1 cm/s 的速度向点 D 运动; 同时点 Q 从点 C 出发, 以 3 cm/s 的速度向点 B 运动. 规定其中一个动点到达端点时, 另一个动点也随之停止运动. 从运动开始, 需经过多长时间, 才能使 $PQ = CD$? 为什么?



(第 18 题)



利用菱形的性质和判定尺规作图

前面学习了菱形的性质和判定，利用菱形的性质和判定，可以帮助我们完成一些尺规作图.

例如，作一个给定角 $\angle MON$ 的平分线. 我们假设 O 是菱形的一个顶点，菱形的一组邻边在角的两边上，那么这个菱形的过点 O 的对角线就是 $\angle MON$ 的平分线的一部分. 由此可以得到利用菱形的性质和判定作给定角的平分线的作法.

作法：如图 1.

(1) 以 $\angle MON$ 的顶点 O 为圆心，任意长为半径作弧，分别交 $\angle MON$ 两边于点 A, B ;

(2) 分别以点 A, B 为圆心， OA （或 OB ）长为半径作弧，两弧相交于点 P （非点 O ），则四边形 $OBPA$ 为菱形（想一想为什么）;

(3) 作射线 OP ，则 OP 就是 $\angle MON$ 的平分线（想一想为什么）.

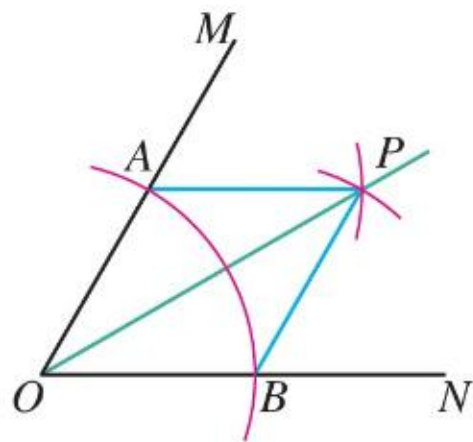


图 1

类似地，请你利用菱形的性质和判定作以下图形，并说明这样作图的道理.

- (1) 作一条线段的垂直平分线;
- (2) 过直线外一点作已知直线的垂线.

数学活动

活动1 黄金矩形

宽与长的比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (约为 0.618) 的矩形叫作黄金矩形. 黄金矩形

给我们以协调、匀称的美感. 世界上有些著名的建筑, 它们中有的建筑立面的矩形轮廓就非常接近黄金矩形.

下面我们折纸做一个黄金矩形:

第一步, 在一张矩形纸片的一端, 利用图 1 的方法折出一个正方形 $MNAB$, 然后把纸片展平.

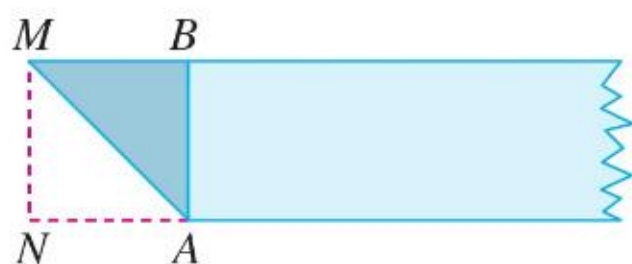


图 1

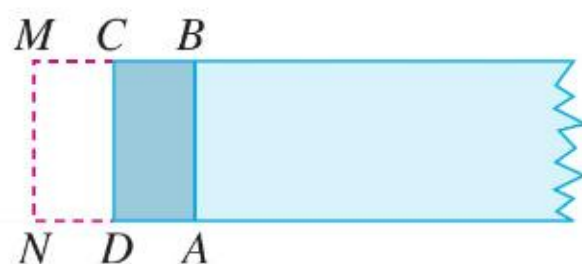


图 2

第二步, 如图 2, 把这个正方形折成两个相同的矩形, 再把纸片展平.

第三步, 折出矩形 $CDAB$ 的对角线 BD , 并把 BD 折到图 3 中所示的 ED 处.

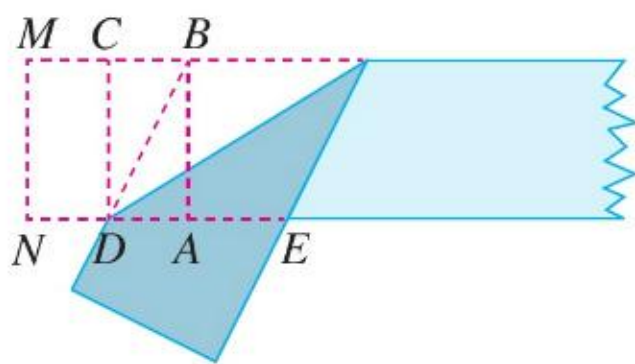


图 3

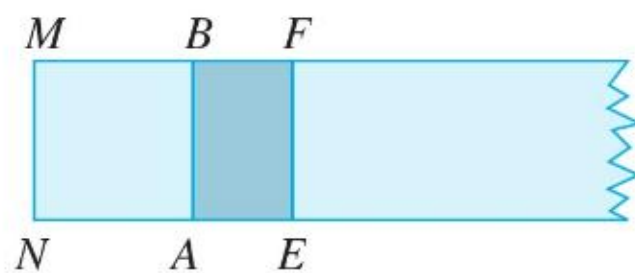


图 4

第四步, 展平纸片, 如图 4, 按照所得的点 E 折出 EF , 矩形 $BAEF$ 就是黄金矩形.

你能说明为什么矩形 $BAEF$ 是黄金矩形吗? (提示: 设 MN 的长为 2.)

活动2 剪拼正方形

如图 5，有两个大小不等的正方形纸片，你能通过剪拼，把它们拼成一个大正方形吗？试试看！



图 5

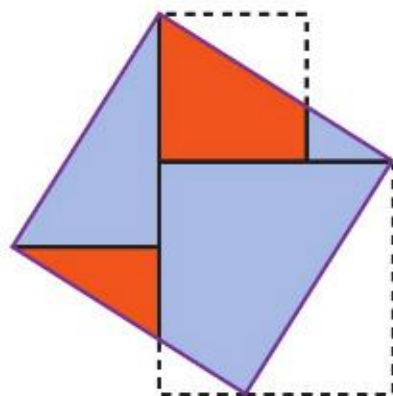


图 6

图 6 给出了一种方法，请你说出这种方法剪拼的过程。你还有其他方法吗？

事实上，图 6 就是刘徽证明勾股定理的“青朱出入图”（图 7），利用了将图形分割后再拼接，面积不变的性质，这也是我国古代“出入相补法”的基本思想。请你查阅相关资料，了解出入相补法及其在我国古代数学研究中的作用。

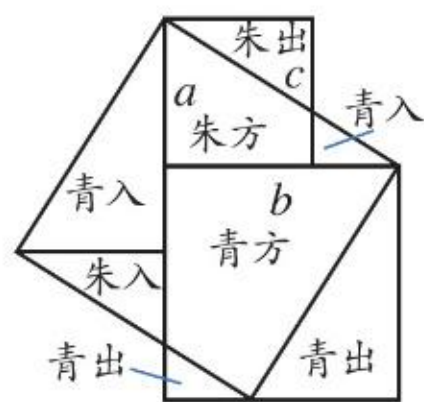
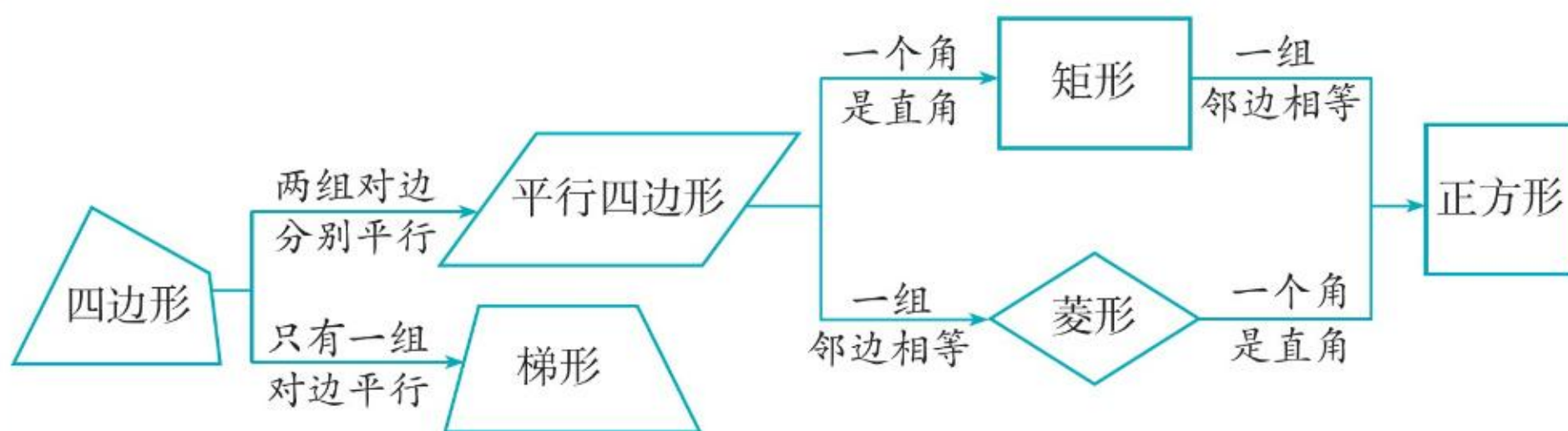


图 7

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

在本章中，我们从一般到特殊地学习了四边形. 对于一般的四边形，主要学习了四边形的内角和与外角和，并把它们推广到多边形. 对于特殊的四边形，首先学习了平行四边形的性质和判定，探索并证明了三角形的中位线定理，理解了平行线之间距离的概念；进而通过平行四边形的角、边的特殊化，得到了矩形、菱形和正方形等特殊的平行四边形，并根据它们的角、边的特殊性，得到了这些特殊的平行四边形的性质和判定.

与三角形类似，无论是对一般的四边形，还是对特殊的四边形——平行四边形，以及对特殊的平行四边形——矩形、菱形、正方形，我们都是从它们的边、角、对角线出发，从位置关系和数量关系的角度研究它们的性质. 在此基础上，利用图形的性质和判定之间的互逆关系，通过证明性质定理的逆命题，得到图形的判定定理. 在对各种四边形性质的学习中，我们往往是先利用图形直观发现图形的性质，再利用逻辑推理证明得到的结论. 这些方法是研究几何图形的常用方法，有利于增强几何直观，提升推理能力.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 四边形、多边形、平行四边形、矩形、菱形、正方形是本章主要研究的几何图形，画出表示它们的图形，并用框图表示它们之间的关系.

2. 四边形的内角和与外角和分别是多少? n 边形呢? 在得出这些结论的过程中, 采用了怎样的方法?

3. 平行四边形有哪些性质? 如何判定一个四边形是平行四边形? 你能概述一下研究平行四边形的思路和方法吗?

4. 矩形、菱形、正方形除了具有平行四边形的性质, 分别还具有哪些性质? 如何判定一个四边形是矩形、菱形、正方形? 你能总结一下研究这些图形的性质和判定的方法吗?

5. 本章我们利用平行四边形的性质, 得出了三角形的中位线定理. 你能仿照这一过程, 再得出一些其他几何结论吗?

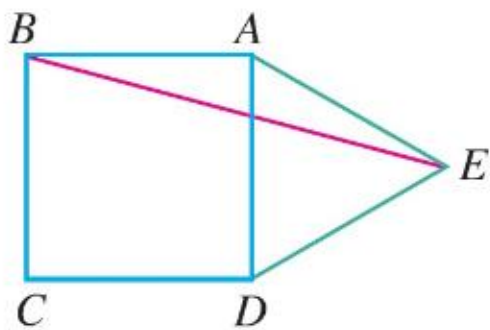


复习题 21

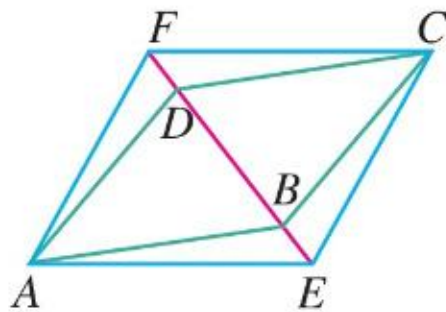
复习巩固

1. 选择题.

- (1) 若四边形的四个内角的度数比为 $1:2:3:4$, 则其中最大的内角是 ().
(A) 120° (B) 135° (C) 144° (D) 150°
- (2) 若平行四边形中两个内角的度数比为 $1:2$, 则其中较小的内角是 ().
(A) 45° (B) 60° (C) 90° (D) 120°
- (3) 若菱形的周长为 8, 高为 1, 则菱形两个相邻的内角的度数比为 ().
(A) $3:1$ (B) $4:1$ (C) $5:1$ (D) $6:1$
- (4) 如图, 在正方形 $ABCD$ 的外侧, 作等边三角形 ADE , 则 $\angle AEB$ 为 ().
(A) 10° (B) 15° (C) 20° (D) 30°



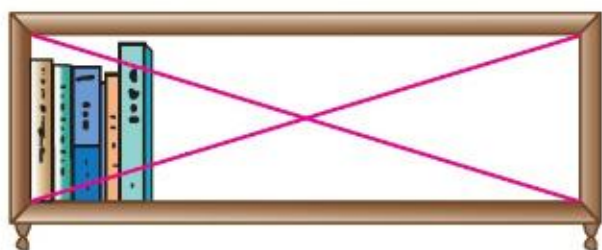
(第 1 (4) 题)



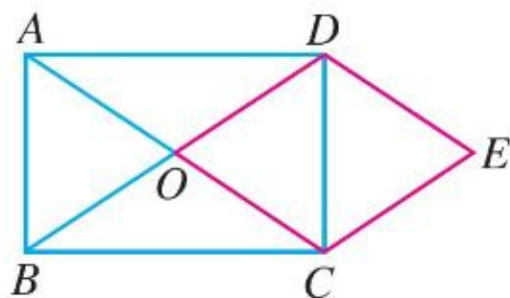
(第 3 题)

2. 一个多边形的每个内角都相等, 且每个内角与和它相邻外角的度数比为 $3:1$. 这个多边形的内角和是多少?

- 如图, 将 $\square ABCD$ 的对角线 BD 向两个方向延长, 分别至点 E, F , 且使 $BE = DF$. 求证: 四边形 $AECF$ 是平行四边形.
- 矩形对角线组成的对顶角中, 有一组是两个 50° 的角. 对角线与各边组成的角是多少度?
- 如图, 你能用一根绳子检查一个书架的侧边是否和上、下底边都垂直吗? 为什么?

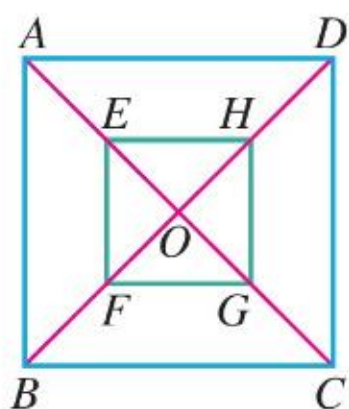


(第 5 题)



(第 6 题)

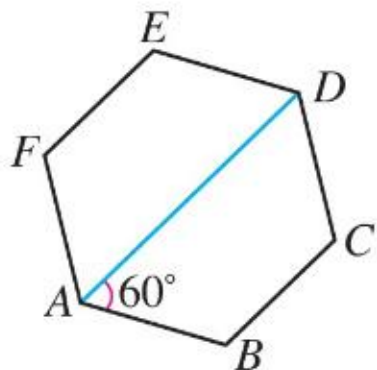
- 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , 且 $DE \parallel AC, CE \parallel BD$. 求证: 四边形 $OCED$ 是菱形.
- 如图, 正方形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , 且 E, F, G, H 分别是 AO, BO, CO, DO 的中点. 求证: 四边形 $EFGH$ 是正方形.



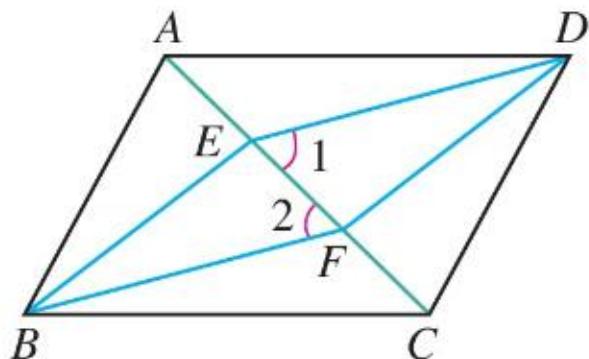
(第 7 题)

综合运用

- 如图, 六边形 $ABCDEF$ 的内角都相等, $\angle DAB = 60^\circ$. AB 与 DE 有怎样的位置关系? BC 与 EF 有这种关系吗? 证明你的结论.



(第 8 题)



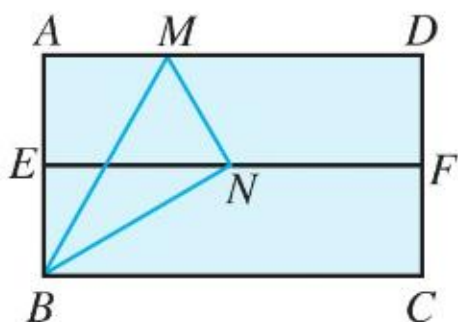
(第 9 题)

- 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $BE \parallel DF$, 且分别交对角线 AC 于点 E, F , 连接 ED, BF . 求证 $\angle 1 = \angle 2$.
- 顺次连接任意一个四边形各边中点所得的四边形叫作四边形的中点四边形, 在第 64 页“例 6”中已经证明了四边形的中点四边形是平行四边形.
 - 平行四边形的中点四边形是什么形状? 为什么?
 - 矩形、菱形和正方形的中点四边形分别是什么形状? 为什么?
- 如果一个四边形是轴对称图形, 并且有两条互相垂直的对称轴, 它一定是菱形吗? 一定是正方形吗?

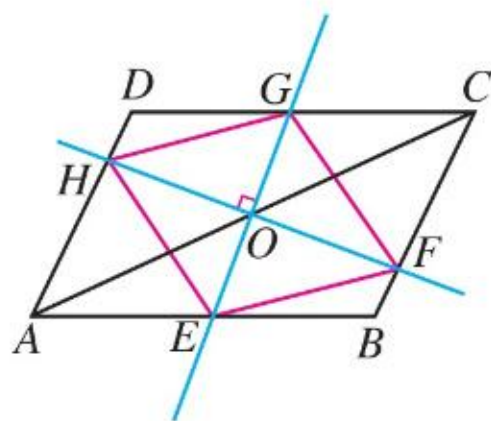
12. 两个全等的三角形纸片，用它们能够拼成什么四边形？要想拼成一个矩形，需要两个什么样的全等三角形？要想拼成菱形或正方形呢？动手剪拼一下，并说明理由.
13. 如果你身旁没有量角器和三角尺，又需要作 30° 的角，可以采用下面的方法（如图所示）：

- (1) 对折矩形纸片 $ABCD$ ，使 AD 与 BC 重合，得到折痕 EF ，把纸片展平.
- (2) 再一次折叠纸片，使点 A 落在 EF 上，并使折痕经过点 B ，得到折痕 BM . 同时得到线段 BN ，把纸片展平.

由此得到 $\angle ABM$ ， $\angle MBN$ 和 $\angle NBC$ 都是 30° ，请你写出证明过程.



(第 13 题)

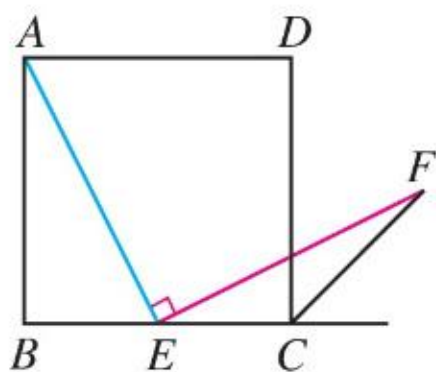


(第 14 题)

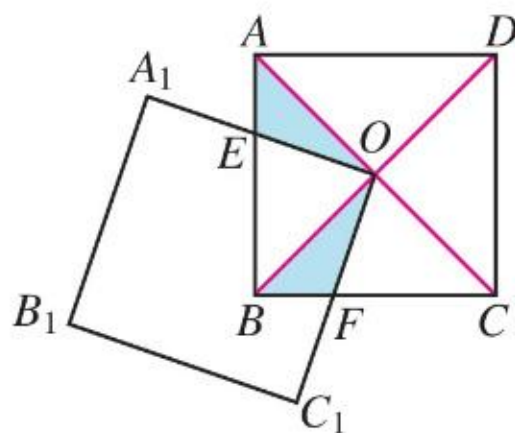
14. 如图，过 $\square ABCD$ 的对角线 AC 的中点 O 作两条互相垂直的直线，分别交 AB ， BC ， CD ， DA 于 E ， F ， G ， H 四点，连接 EF ， FG ， GH ， HE . 判断四边形 $EFGH$ 的形状，并说明理由.

拓展探索

15. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形， E 是边 BC 的中点， $\angle AEF = 90^\circ$ ，且 EF 交正方形外角的平分线 CF 于点 F . 求证 $AE = EF$. (提示：取 AB 的中点 G ，连接 EG .)



(第 15 题)



(第 16 题)

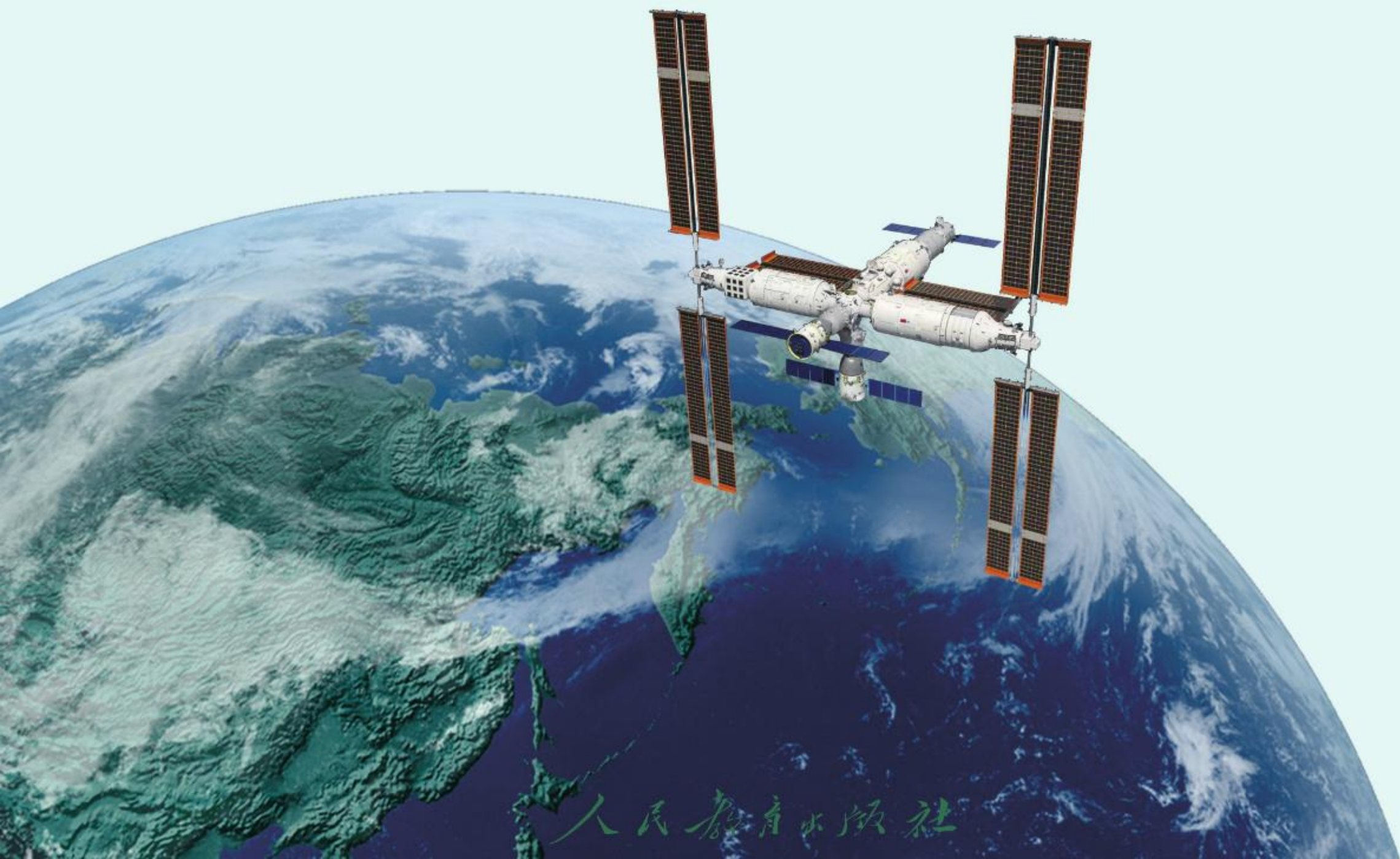
16. 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O ， O 又是正方形 $A_1B_1C_1O$ 的一个顶点，而且这两个正方形的边长相等. 无论正方形 $A_1B_1C_1O$ 绕点 O 怎样转动，两个正方形重叠部分的面积，总等于一个正方形面积的 $\frac{1}{4}$. 想一想这是为什么，并说明理由.

第二十二章 函数

“万物皆变”——行星在宇宙中的位置随时间的变化而变化，我国“天宫”空间站与北京航天飞行控制中心的距离随时间的变化而变化，气温随海拔的变化而变化，树高随树龄的变化而变化……。在现实世界中，这种一个量随另一个量的变化而变化的现象大量存在。

为了研究运动变化现象中变量之间的关系，数学中逐渐形成了函数概念。人们通过研究函数及其性质，可以更深入地认识现实世界中事物变化的规律。

在本章中，我们将通过具体例子，认识常量和变量，学习函数的概念和表示方法。在此基础上，用函数描述一些简单问题中变量之间的关系，感受函数在刻画变量关系和变化规律中的作用。



22.1 函数的概念

在研究运动变化现象时，为了描述事物的状态，人们经常会引进一些量，通过研究不同量之间的关系，来认识事物变化的规律.

先思考几个具体问题.

思考

(1) 汽车以 60 km/h 的速度匀速行驶，当行驶时间 t 分别为 1 h , 2 h , 5 h 时，行驶路程 s 分别为多少？ s 的值随 t 的值的变化而变化吗？

(2) 电影票的售价为 40 元/张 . 第一场售出 80 张票 ，第二场售出 105 张票 ，第三场售出 180 张票 ，三场电影的票房收入各是多少元？设一场电影售出 $x \text{ 张票}$ ，票房收入为 $y \text{ 元}$ ， y 的值随 x 的值的变化而变化吗？

(3) 你见过水中的涟漪吗？如图 22.1-1，圆形水波慢慢地扩大. 在这一过程中，当圆的半径 r 分别为 10 cm , 20 cm , 30 cm 时，圆的面积 S 分别为多少？ S 的值随 r 的值的变化而变化吗？



图 22.1-1

(4) 长方体的体积为 $1\,000 \text{ cm}^3$ ，当长方体的底面积 S 分别为 50 cm^2 , 100 cm^2 , 125 cm^2 时，高 h 分别为多少？ h 的值随 S 的值的变化而变化吗？

上述问题反映了不同事物的变化过程. 问题 (1) 反映了汽车行驶的路程 s 随行驶时间 t 的变化而变化的过程. 在这个过程中，行驶速度的值是始终不变的，行驶时间 t 和行驶路程 s 的值是变化的. 问题 (2) 反映了电影票房收入 y 随售出票数 x 的变化而变化的过程. 在这个过程中，电影票的售价是始终不变的，售出票数 x 和票房收入 y 的值是变化的.

一般地，在一个变化过程中，我们称数值始终不变的量为**常量**，数值发生变化的量为**变量**. 例如，在问题（1）和（2）中，汽车行驶的速度、电影票的售价是常量；汽车行驶的时间 t 、路程 s ，售出的电影票数 x 、票房收入 y 是变量.

问题（3）和问题（4）反映了什么变化过程？其中的常量和变量分别是什么？

例 1 指出下列问题中的常量和变量：

（1）某市居民生活用水的价格为 5 元/t. 记某户的月用水量为 x t，月应缴水费为 y 元.

（2）在某地乘坐公交车，刷公交卡每次收费 1 元. 李明在公交卡中存入 30 元，记此后他乘坐公交车 n 次，公交卡中的余额为 w 元.

（3）用 20 m 长的绳子围一个矩形，记矩形的一边长为 x m，矩形的面积为 S m².

解：（1）生活用水的价格是常量，某户的月用水量 x 和月应缴水费 y 是变量.

（2）刷公交卡每次收费和存入的钱数是常量，乘坐公交车的次数 n 和公交卡中的余额 w 是变量.

（3）绳的长度是常量，矩形的一边长 x 和面积 S 是变量.

练习

1. 指出下列问题中的常量和变量：

（1）向一个水池注水，注水速度为 0.1 m³/min. 记注水时间为 x min，注水量为 y m³.

（2）我国“十三五”期间每年的国内生产总值如下表所示.

年份 x	2016	2017	2018	2019	2020
国内生产总值 y /亿元	746 395.1	832 035.9	919 281.1	986 515.2	1 013 567.0

（3）一个平行四边形的底边长为 5，高 h 可以任意改变，面积为 S .

2. 举两个运动变化的例子，并分别指出其中的常量和变量.

思考

第 90 页“思考”的问题 (1)~(4) 中各有两个变量，每个问题中的两个变量之间有什么关系？如何表示这种关系？

在问题 (1) 中，两个变量是 t 和 s ， s 随 t 的变化而变化。每当 t 取定一个值时， s 就有唯一确定的值与其对应。其中，当 $t=1$ 时， $s=60$ ；当 $t=2$ 时， $s=120$ ；当 $t=5$ 时， $s=300$ ……它们之间的关系可以用 $s=60t$ 表示。

在问题 (2) 中，两个变量是 x 和 y ， y 随 x 的变化而变化。每当 x 取定一个值时， y 就有唯一确定的值与其对应。其中，当 $x=80$ 时， $y=3\ 200$ ；当 $x=105$ 时， $y=4\ 200$ ；当 $x=180$ 时， $y=7\ 200$ 。它们之间的关系可以用 $y=40x$ 表示。

类似地，请你分别指出问题 (3) (4) 中两个变量之间的关系，并写出关系式。

归纳

上面每个问题中的两个变量，当其中一个变量取定一个值时，另一个变量就有唯一确定的值与其对应。

一些用图或表格表达的问题中，也能看到两个变量之间有上面那样的关系。

思考

(1) 潮汐是指海水在月球和太阳引力作用下发生的周期性涨落现象。我国某港口潮水的高度（简称潮高）在某时段的变化如图 22.1-2 所示，时间与潮高分别记作变量 t 与 h 。这两个变量之间有什么关系？

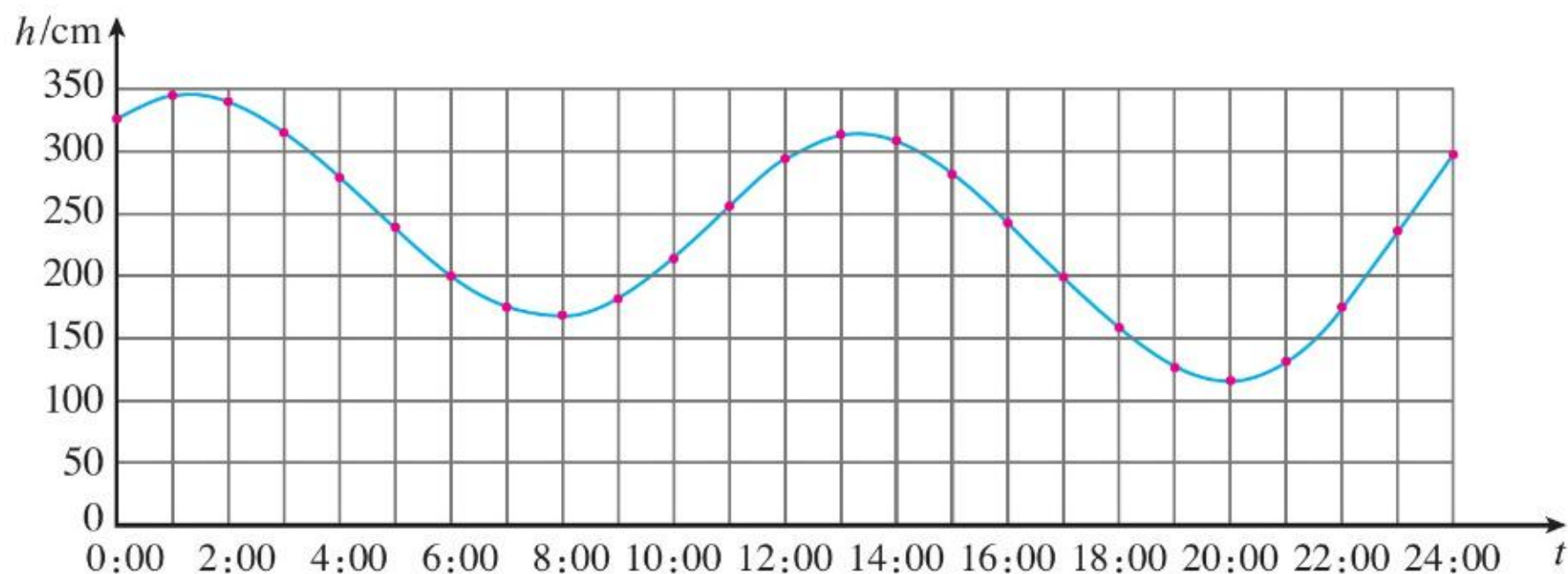


图 22.1-2

(2) 某年某银行整存整取的存款期限与对应的年利率如表 22.1-1 所示, 存款期限与年利率分别记作变量 x 和 y . 这两个变量之间有什么关系?

表 22.1-1

存款期限 x /月	3	6	12	24	36	60
年利率 y /%	1.15	1.35	1.45	1.65	1.95	2.00

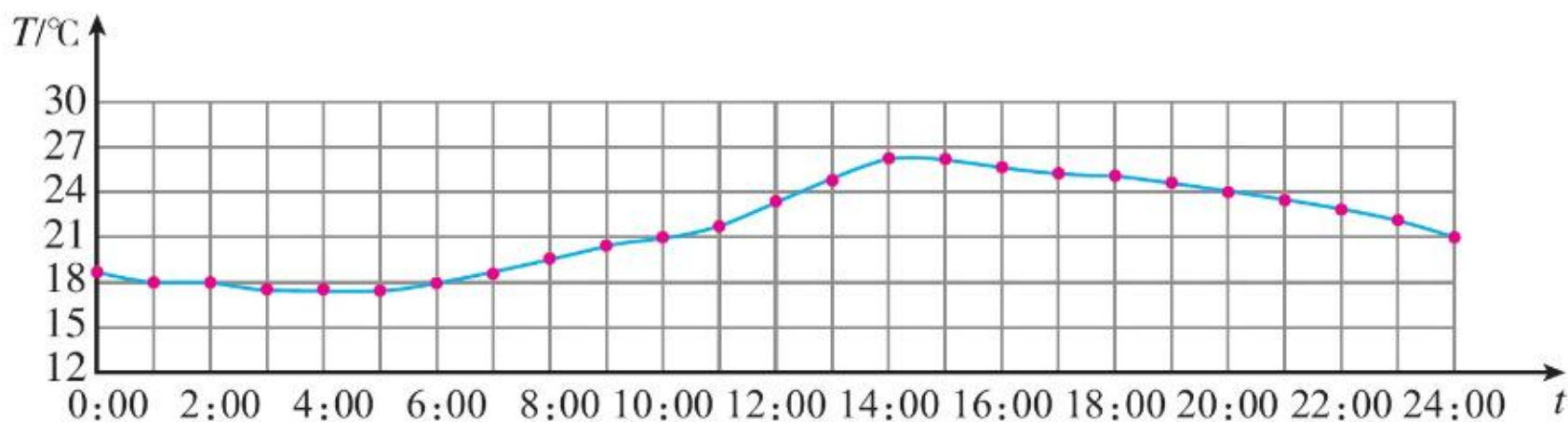
一般地, 在一个变化过程中, 如果有两个变量 x 与 y , 并且对于 x 的每一个确定的值, y 都有唯一确定的值与其对应, 那么我们就说 x 是**自变量**, y 是 x 的**函数** (function). 如果当 $x=a$ 时 $y=b$, 那么 b 叫作当自变量的值为 a 时的**函数值**.

可以认为: 在第 90 页“思考”的问题 (1) 中, 时间 t 是自变量, 路程 s 是 t 的函数, 当 $t=1$ 时, 函数值 $s=60$, 当 $t=2$ 时, 函数值 $s=120$; 在图 22.1-2 中, 时间 t 是自变量, 潮高 h 是 t 的函数, 当 $t=18$ 时, 函数值 $h=158$; 在表 22.1-1 中, 存款期限 x 是自变量, 年利率 y 是 x 的函数, 当 $x=12$ 时, 函数值 $y=1.45\%$.

练习

1. 判断下列问题中的两个变量之间是不是函数关系. 如果是, 指出其中的自变量与函数.

- (1) 改变正方形的边长 x , 正方形的面积 S 随 x 的变化而变化;
- (2) 乘坐摩天轮时, 游客离地面的高度 h 随时间 t 的变化而变化;
- (3) 某天不同时刻的气温如图所示, 气温 T 随时间 t 的变化而变化;



(第 1 (3) 题)

- (4) 某地一年不同月份的降水量如下表所示, 降水量 y 随月份 x 的变化而变化.

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
降水量 y/mm	20	23	43	95	146	193	186	138	106	86	48	24

2. 举出一个函数例子, 说明其中的函数关系, 并指出其中的自变量与函数.

从上面的内容可知, 函数是刻画变量之间对应关系的数学模型, 许多问题中变量之间的关系都可以用函数来表示.

例 2 汽车油箱中有汽油 50 L. 如果不再加油, 那么油箱中剩余的油量 y (单位: L) 随行驶路程 x (单位: km) 的增加而减少. 已知该汽车平均每千米耗油 0.1 L.

- (1) 写出表示 y 与 x 的函数关系的式子;
- (2) 指出自变量 x 的取值范围;
- (3) 汽车行驶 200 km 时, 油箱中还有多少汽油?

解: (1) 行驶路程 x 是自变量, 油箱中剩余的油量 y 是 x 的函数, 它们的关系为

$$y = 50 - 0.1x.$$

(2) 仅从式子 $y = 50 - 0.1x$ 看, x 可以取任意实数. 但是考虑到 x 代表的实际意义为行驶路程, 因此 x 不能取负数. 行驶中的耗油量为 $0.1x$ L, 它不能超过油箱中现有汽油量 50 L, 即

$$0.1x \leq 50.$$

因此, 自变量 x 的取值范围是

$$0 \leq x \leq 500.$$

(3) 汽车行驶 200 km 时, 油箱中剩余的汽油量是函数 $y = 50 - 0.1x$ 在 $x = 200$ 时的函数值. 将 $x = 200$ 代入 $y = 50 - 0.1x$, 得

$$y = 50 - 0.1 \times 200 = 30.$$

因此, 汽车行驶 200 km 时, 油箱中还有 30 L 汽油.

像 $y = 50 - 0.1x$ 这样, 用关于自变量的数学式子表示函数与自变量之间的关系是表示函数的常用方法, 这种式子叫作**函数的解析式**.

0.1x 表示的实际意义是什么?

确定自变量的取值范围时, 不仅要考虑使函数关系式有意义, 而且要注意问题的实际意义.

练习

- 判断下列问题中的两个变量之间是不是函数关系. 如果是, 指出其中的自变量与函数, 并写出函数解析式.
 - 水箱中原有水 10 L, 漏水速度为 0.05 L/h, 水箱中剩余的水量 V (单位: L) 随时间 t (单位: h) 的变化而变化;
 - 绿水村的耕地面积是 10^6 m^2 , 这个村的人均耕地面积 y (单位: m^2) 随人数 n 的变化而变化.
- 梯形的上底长为 2 cm, 高为 3 cm, 下底长 x (单位: cm) 大于上底长但不超过 5 cm, 写出梯形面积 S (单位: cm^2) 关于 x 的函数解析式, 并指出自变量 x 的取值范围.
- 举出一个函数例子, 要求其中的函数关系能用解析式表示, 并指出自变量的取值范围.

习题 22.1

复习巩固

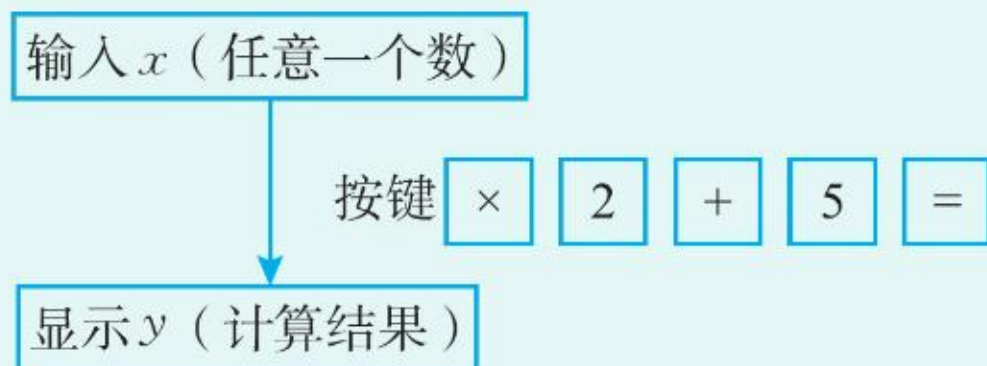
- 指出下列问题中的常量和变量:
 - 把 10 本书随意放入两个抽屉 (每个抽屉内都放), 第一个抽屉放入 x 本, 第二个抽屉放入 y 本.
 - 水中涟漪不断扩大, 记圆形水波的半径为 r , 周长为 C , 圆周率为 π .
 - 张华在操场跑步. 已知操场一圈为 400 m, 记她跑的圈数为 n , 跑的路程为 s m.
- 判断下列问题中的两个变量之间是不是函数关系. 如果是, 指出其中的自变量与函数.
 - 记小于自然数 n 的质数的个数为 m , m 随 n 的变化而变化.
 - 北京天安门广场的国旗每天随日出升起. 某年国庆七天假期每天的升旗时刻如下表所示, 升旗时刻随日期的变化而变化.

日期 x	1	2	3	4	5	6	7
升旗时刻 y	6:10	6:11	6:12	6:13	6:14	6:15	6:16

3. 购买一些铅笔，单价为 0.4 元/支，总价 y （单位：元）随铅笔支数 x 的变化而变化. 指出其中的常量与变量，自变量与函数，并写出函数解析式.
4. 一个三角形的底边长为 5，面积 S 随底边上的高 h 的变化而变化. 指出其中的常量与变量，自变量与函数，并写出函数解析式，以及自变量的取值范围.

综合运用

5. 在计算器上按下面的程序操作：



填表：

x	1	3	-4	0	101	-5.2
y						

显示的计算结果 y 是输入数值 x 的函数吗？为什么？

6. 下列式子中的 y 是 x 的函数吗？为什么？

(1) $y=3x-5$; (2) $y=\frac{x-2}{x-1}$; (3) $y=\sqrt{x-1}$.

7. 分别对第 6 题中的各函数解析式进行讨论：

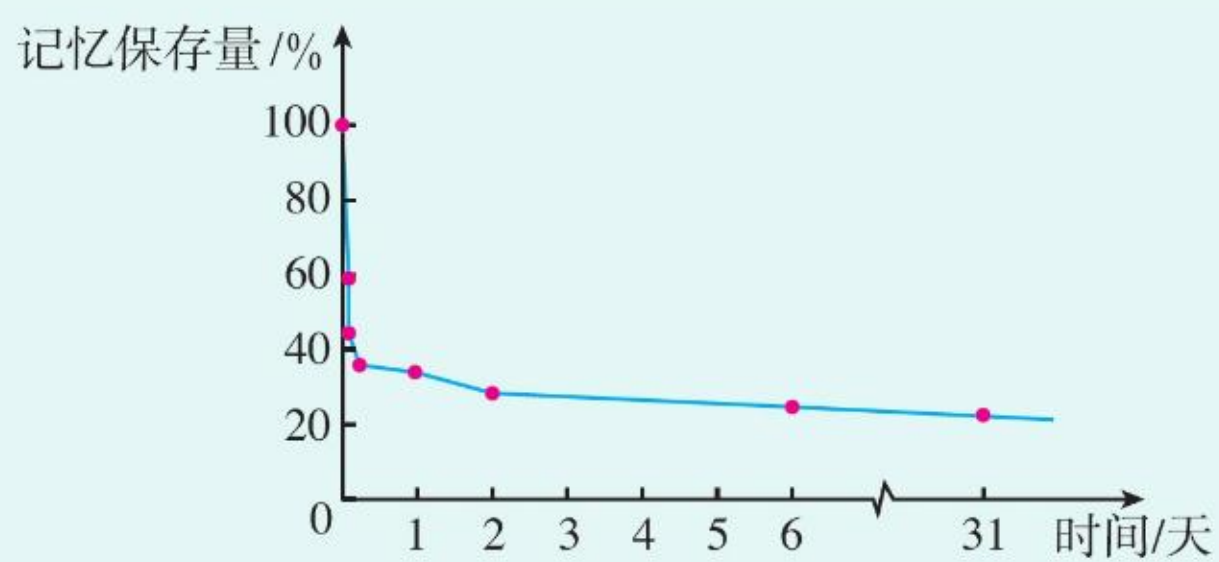
- (1) 当自变量 x 在什么范围内取值时，函数解析式有意义？
- (2) 当 $x=5$ 时，对应的函数值是多少？

8. 风寒效应是一种因风所引起的使体感温度较实际气温低的现象. 实验表明，当气温在 $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时，风力级别 v 和人的体感温度 T 的关系如下表所示. T 是 v 的函数吗？为什么？

风力级别 v /级	0	3	5	7
人的体感温度 T / $^{\circ}\text{C}$	10	5	0	-3

拓广探索

9. 人们对于学过的知识会遗忘，遗忘曲线（如图）描述了人类大脑对新事物记忆保存量减少的规律.



(第9题)

- (1) 图中横轴表示初次记忆后经过的时间 t ，纵轴表示记忆保存量 y ， y 是 t 的函数吗？为什么？
- (2) 观察遗忘曲线，对于新学习的知识，你能否给出复习的建议？

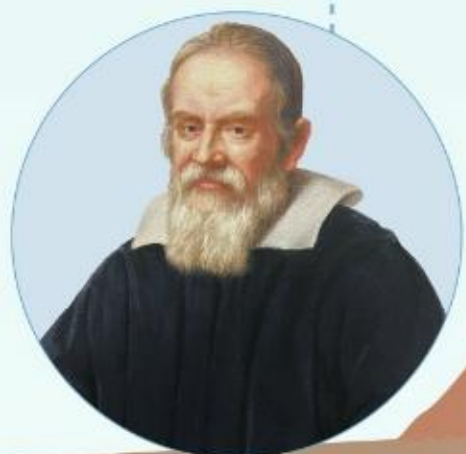


函数概念的探索之路

不知是否有一瞬，你曾好奇过，一个数学概念是如何来的？

正如一棵大树从发芽到繁盛一样，数学概念的发展也不是一蹴而就的，有些数学概念甚至跨越数百年、数千年，才以如今的面貌呈现在我们眼前。函数概念从产生到完善跨越了3个世纪，对于数学家而言，那是一条曲折的探索之路。

世界是一本以数学语言写成的书，用数学可以探秘自由落体运动、抛物体描绘出的路径……



伽利略
(Galileo, 1564—1642)

动点做曲线运动时，它的横坐标和纵坐标相互依赖并同时发生变化。



笛卡儿
(Descartes, 1596—1650)

可以用函数表示随着曲线上的点变动的量，比如点的横、纵坐标，切线的长度等。



莱布尼茨
(Leibniz, 1646—1716)

将函数界定在曲线上的量，不能精确地描述运动中的变量关系，一个变量的函数应该是由该变量和一些常量以任何方式组成的！



约翰·伯努利
(Johann Bernoulli, 1667—1748)

17世纪

由运动的研究引出一个基本的数学概念——函数，那么函数是什么？

对于数学家来说，一个概念必须是明确的，不过这种明确很多时候也是从直观开始的。从直观的曲线开始，用函数表示几何量，就是“函数概念的几何起源”。

假定 z 是一个变量, 它可以逐次取所有可能的实数值. 若对它的每一个值, 都有不定量 w 的唯一值与之相对应, 则称 w 为 z 的函数.

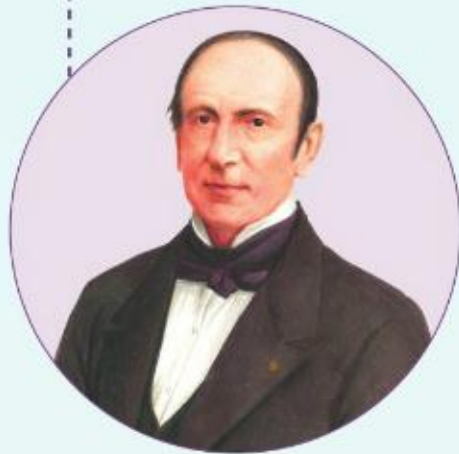
有的函数很难用图象或解析式表示, 比如下面的函数: 当 x 为有理数时, $y=1$; 当 x 为无理数时, $y=0$. 怎么办?

即使一个简单函数, 也可能有不同的解析式. 如果某些变量间存在一定关系, 当给定其中某一变量的值, 其他变量也随之确定, 那么其他变量就可称为函数.

再精确一些, 可以“解析表示”的, 就称为函数. 解析表示, 包括以各种运算连接变量和常量.



欧拉
(Euler, 1707—1783)



柯西
(Cauchy, 1789—1857)



狄利克雷
(Dirichlet, 1805—1859)



黎曼
(Riemann, 1826—1866)

19世纪

函数究竟是什么? 是一条曲线, 还是一个解析式? 19 世纪, 数学飞速发展, 出现了各种各样的函数, 于是, 原有解释已经捉襟见肘了, 利用“对应”解释函数的方法出现了, 即现有教科书中的函数定义.

18世纪

对于一个概念发展中产生的局限性和模糊用语, 数学家是不能忍受的, 如“曲线上运动的量”“任何方式”, 于是有了“运算连接”. 认同这种解析式解释的数学家很多, 于是“函数是由一个解析表达式所给出的”成为了 18 世纪占据主位的函数概念.

22.2 函数的表示

由上一节我们知道，用解析式可以表示函数与自变量之间的关系，例如路程与时间的关系；用图和表格也可以表示函数与自变量之间的关系，例如潮水高度与时间的关系、年利率与存款期限的关系。表示函数时，要根据具体情况选择合适的方法。

有些问题中的函数关系很难用解析式表示，但是可以用图来直观地反映。对于能用解析式表示的函数关系，如果也能画图表示，那么会使函数关系更直观。例如，正方形的面积 S 与边长 x 的函数解析式为 $S=x^2$ 。根据问题的实际意义，可知自变量 x 的取值范围是 $x>0$ 。我们还可以通过在平面直角坐标系中画图的方法来表示 S 与 x 的关系。

计算并填写表 22.2-1。

表 22.2-1

x	...	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	...
S	...	0.25	1							...

如图 22.2-1，在平面直角坐标系中，画出表 22.2-1 中各对数值所对应的点，然后用平滑曲线依次连接这些点。所得曲线上每一个点都代表 x 的值与 S 的值的一种对应，例如，点 $(2, 4)$ 表示当 $x=2$ 时， $S=4$ 。

自变量 x 的一个确定的值与它所对应的唯一的函数值 S ，是否确定了一个点 (x, S) 呢？

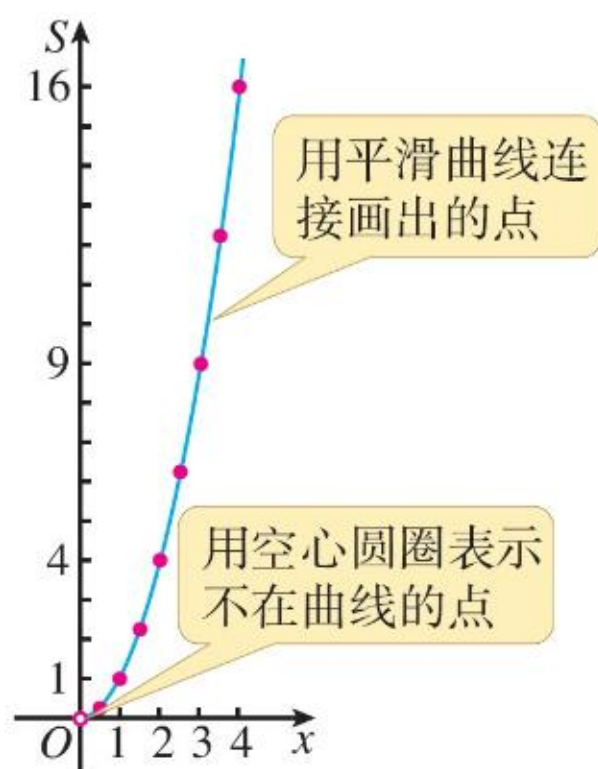


图 22.2-1

表示 x 与 S 的对应关系的点有无数个，但是实际上我们只能描出其中有限个点，同时想象出其他点的位置。

一般地，对于一个函数，如果把自变量与函数的每对对应值分别作为点的横、纵坐标，那么坐标平面内由这些点组成的图形，就是这个函数的图象. 图 22.2-1 的曲线即函数 $S=x^2$ ($x>0$) 的图象.

例 1 在下列式子中， y 是 x 的函数. 画出这些函数的图象，通过图象观察函数与自变量的关系.

(1) $y=x+0.5$; (2) $y=\frac{3}{x}$ ($x>0$).

解：(1) 从式子 $y=x+0.5$ 可以看出， x 取任意实数时这个式子都有意义，所以 x 的取值范围是全体实数.

从 x 的取值范围中选取一些数值，算出 y 的对应值，列表（计算并填写表 22.2-2 中空格）.

表 22.2-2

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...		-0.5	0.5			...

根据表 22.2-2 中的数值在平面直角坐标系中描点 (x, y) ，并用平滑曲线连接这些点（图 22.2-2）.

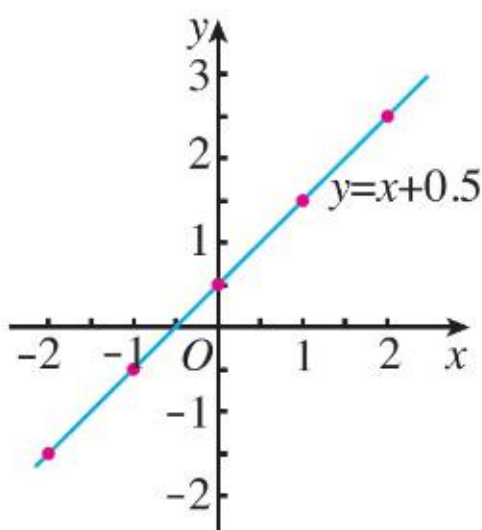


图 22.2-2

从函数 $y=x+0.5$ 的图象可以看出，直线从左向右上升，即当 x 由小变大时， y 随之增大.

(2) $y=\frac{3}{x}$ ($x>0$) 中 x 的取值范围是全体正实数，从 x 的取值范围中选取一些数值，算出 y 的对应值，列表（计算并填写表 22.2-3 中空格）.

表 22.2-3

x	...	0.5	1	2	3	4	5	6	...
y	...		3	1.5	1	0.75			...

根据表 22.2-3 中的数值在平面直角坐标系中描点 (x, y) ，并用平滑曲线连接这些点（图 22.2-3）.

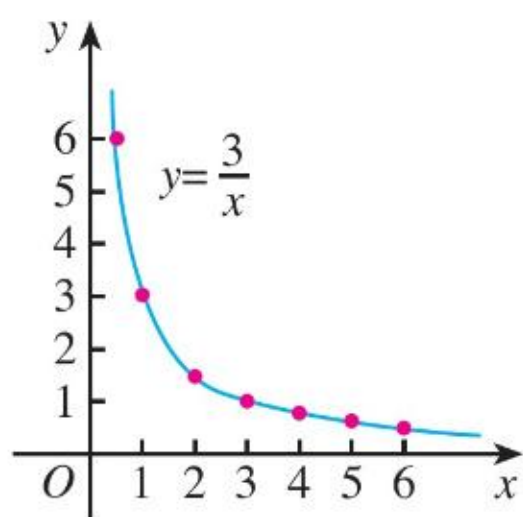


图 22.2-3

从函数 $y = \frac{3}{x}$ ($x > 0$) 的图象可以看出，曲线从左向右下降，即当 x 由小变大时， y 随之减小.

归纳

用描点法画函数图象的一般步骤如下：

第一步，列表——表中给出一些自变量的值及其对应的函数值；

第二步，描点——在平面直角坐标系中，以自变量的值为横坐标，相应的函数值为纵坐标，描出表格中数值对应的各点；

第三步，连线——按照横坐标从小到大的顺序，把所描出的各点用平滑曲线连接起来.

练习

- 画出函数 $y = 2x - 1$ 的图象；
 - 判断点 $A(-2.5, -4)$ ， $B(1, 3)$ ， $C(2.5, 4)$ 是否在函数 $y = 2x - 1$ 的图象上.
- 画出函数 $y = x^2 + 1$ 的图象.
 - 观察函数 $y = x^2 + 1$ 的图象，当 $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而增大还是 y 随 x 的增大而减小？当 $x > 0$ 时呢？

下面我们利用函数图象解决一些实际问题.

思考

图 22.2-4 是自动测温仪记录的图象，它反映了北京的春季某天气温 T 如何随时间 t 的变化而变化. 你从图象中得到了哪些信息？

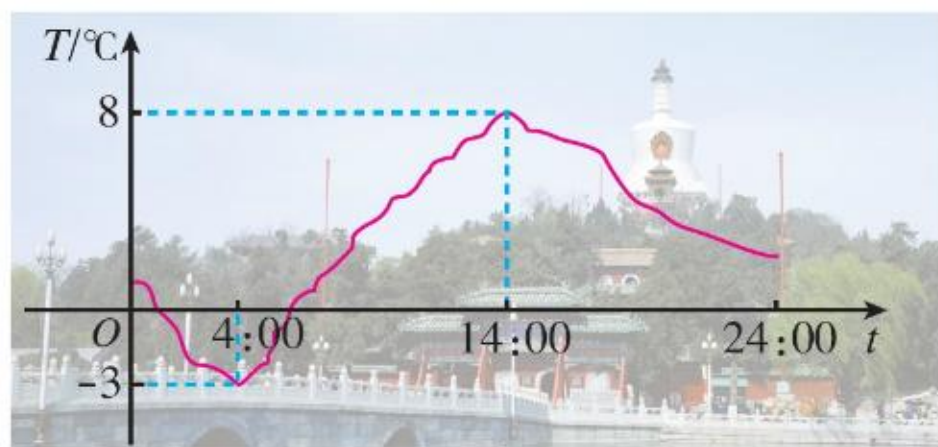


图 22.2-4

如有条件，你可以用带有温度探头信息技术工具测量、记录温度，并绘制温度随时间变化的图象.

由图 22.2-4 可以看出，气温 T 随时间 t 的变化而变化，对于时间 t 的每一个确定的值，气温 T 都有唯一确定的值与其对应. 因此，气温 T 是时间 t 的函数，图 22.2-4 是这个函数的图象.

由图象可知：

- (1) 这一天中凌晨 4 时气温最低 (-3°C)，14 时气温最高 (8°C)；
- (2) 从 0 时至 4 时气温呈下降状态（即温度随时间的增长而下降），从 4 时到 14 时气温呈上升状态，从 14 时至 24 时气温又呈下降状态；
- (3) 我们可以从图象看出这一天中任一时刻的气温大约是多少.

例 2 如图 22.2-5，李明家、食堂、图书馆在同一条直线上. 李明从家去食堂吃早餐，接着去图书馆查资料，然后回家. 图 22.2-6 反映了这个过程中，李明离家的距离 y 与时间 x 之间的对应关系.



图 22.2-5

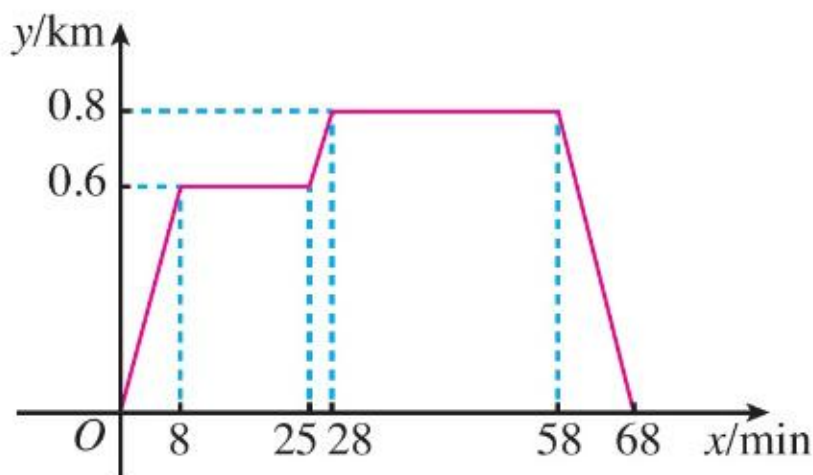


图 22.2-6

根据图象回答下列问题：

- (1) 食堂离李明家多远？李明从家到食堂用了多长时间？
- (2) 李明吃早餐用了多长时间？
- (3) 食堂离图书馆多远？李明从食堂到图书馆用了多长时间？
- (4) 李明查资料用了多长时间？
- (5) 图书馆离李明家多远？李明从图书馆回家的平均速度是多少？

分析：李明离家的距离 y 是时间 x 的函数. 由图象中有两段平行于 x 轴的线段可知，李明离家后有两段时间先后停留在食堂与图书馆里.

解：(1) 由纵坐标看出，食堂离李明家 0.6 km ；由横坐标看出，李明从家到食堂用了 8 min .

(2) 由横坐标看出， $25 - 8 = 17$ ，李明吃早餐用了 17 min .

(3) 由纵坐标看出， $0.8 - 0.6 = 0.2$ ，食堂离图书馆 0.2 km ；由横坐标看出， $28 - 25 = 3$ ，李明从食堂到图书馆用了 3 min .

(4) 由横坐标看出， $58 - 28 = 30$ ，李明查资料用了 30 min .

(5) 由纵坐标看出，图书馆离李明家 0.8 km ；由横坐标看出， $68 - 58 = 10$ ，李明从图书馆回家用了 10 min ，由此算出李明从图书馆回家的平均速度是 0.08 km/min .

探究

构建合适的问题情境，使其中的变量之间的函数关系可以分别用图 22.2-7 和图 22.2-8 中的图象来表示.

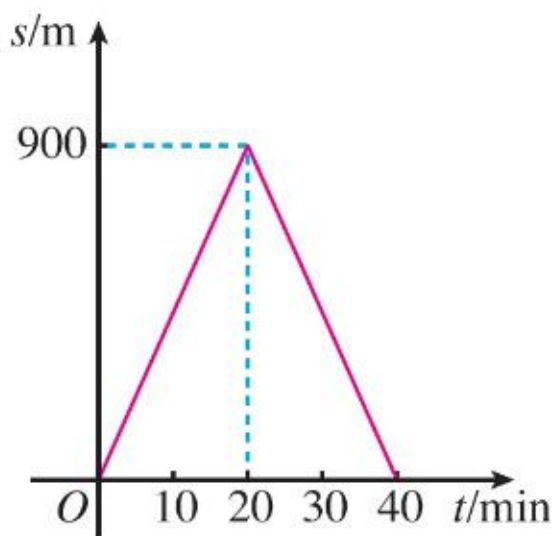


图 22.2-7

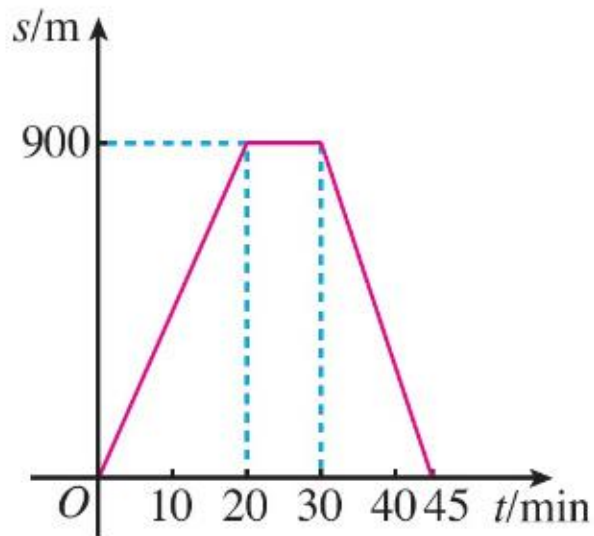
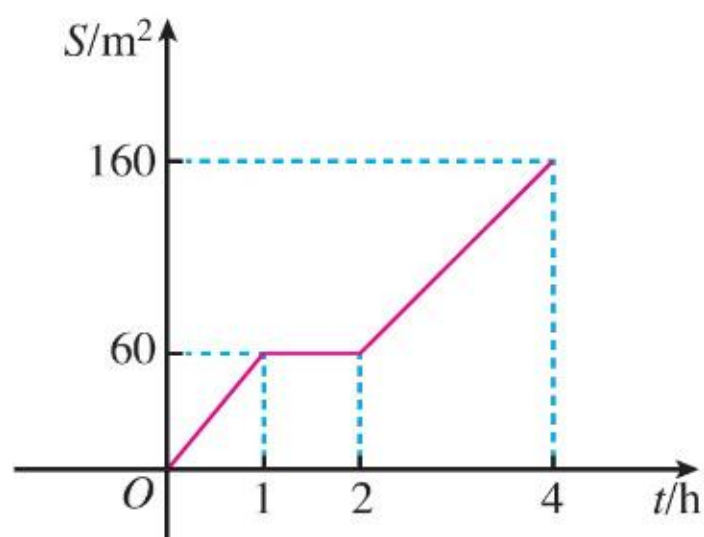


图 22.2-8

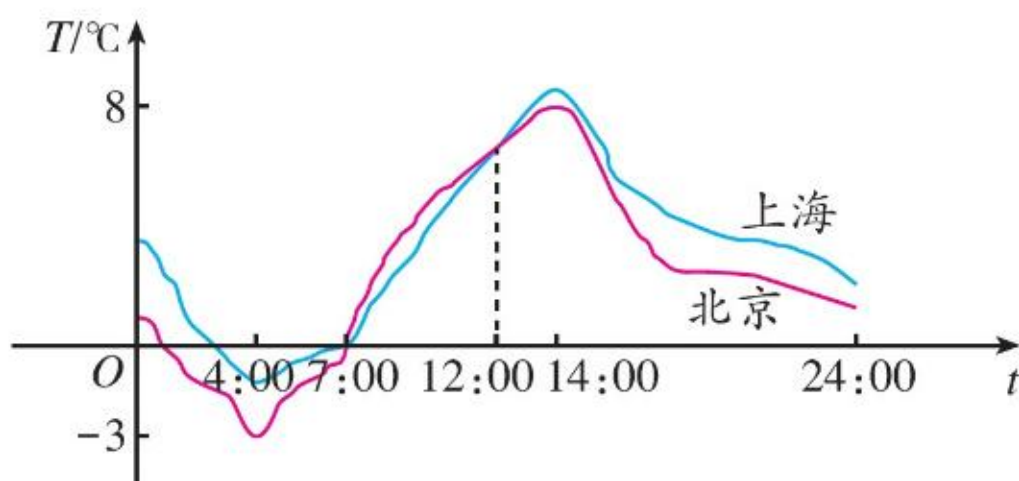
练习

1. 园林队在某公园进行绿化, 中间休息了一段时间. 已知绿化面积 S 与工作时间 t 的函数关系如图所示.

- (1) 休息前, 园林队工作了多长时间? 绿化面积为多少?
- (2) 园林队中间休息了多长时间?
- (3) 休息后, 园林队每小时完成的绿化面积为多少?



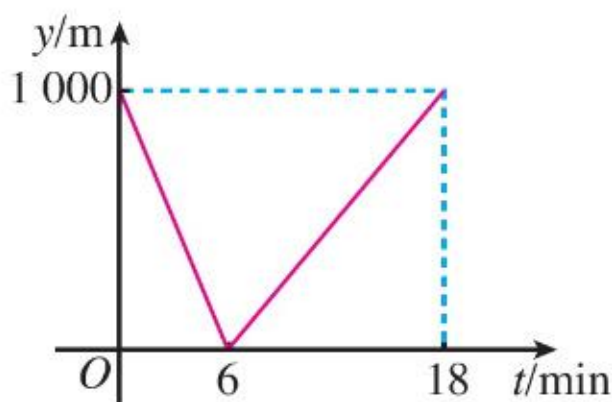
(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图, 这是某一天北京与上海的气温随时间变化的图象.

- (1) 这一天内, 北京与上海何时气温相同?
- (2) 这一天内, 上海在哪段时间比北京气温高? 在哪段时间比北京气温低?
- (3) 你还能从函数图象中得到哪些信息?



(第 3 题)

3. 如图, 构建问题情境, 使其中变量之间的函数关系可以用图中的图象来表示.

由上面的内容可知, 写出函数解析式, 或者列表格, 或者画函数图象, 都可以表示具体的函数. 这三种表示函数的方法, 分别称为**解析法**、**列表法**和**图象法**.

思考

从前面的例子看, 你认为三种表示函数的方法各有什么优点?

对于一个具体的函数问题, 应当选择适当的方法表示其中的函数关系. 有时为全面地认识问题, 需要同时使用多种表示法.

例3 一个水库的水位在最近5 h内持续上涨. 表 22.2-4 记录了这5 h内6个时间点的水位高度, 其中 t 表示时间, y 表示水位高度.

表 22.2-4

t/h	0	1	2	3	4	5
y/m	3	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5

(1) 在平面直角坐标系中描出表 22.2-4 中数据对应的点, 这些点是否在同一条直线上? 由此你能发现水位变化有什么规律吗?

(2) 水位高度 y 是不是时间 t 的函数? 如果是, 写出一个符合表 22.2-4 中数据的函数解析式, 并画出这个函数的图象. 这个函数能表示水位的变化规律吗?

(3) 如果这种上涨规律还会持续2 h, 那么2 h后水位高度将为多少米?

解: (1) 如图 22.2-9, 描出表 22.2-4 中数据对应的点. 可以看出, 这6个点在同一条直线上. 再结合表 22.2-4 中的数据, 可以发现每小时水位上升0.3 m. 由此猜想, 如果画出这5 h内其他时刻(如 $t=2.5$ h等) 及其水位高度所对应的点, 它们可能也在这条直线上, 即在这个时间段中水位可能是始终以同一速度均匀上升的.

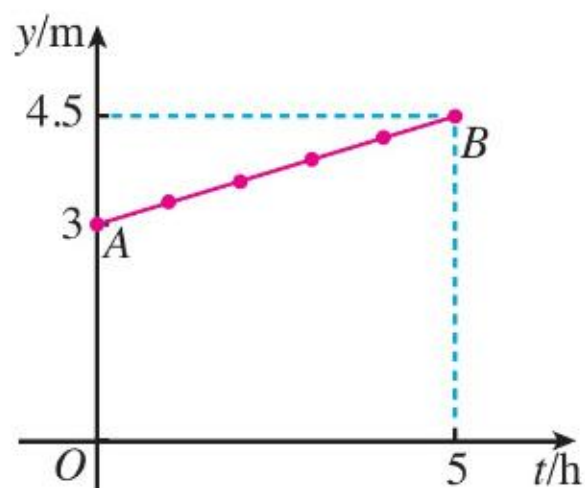


图 22.2-9

(2) 由于水位在最近5 h内持续上涨, 对于时间 t 的每一个确定的值, 水位高度 y 都有唯一的值与其对应, 所以 y 是 t 的函数. 开始时水位高度为3 m, 以后每小时水位上升0.3 m. 函数

$$y = 0.3t + 3 \quad (0 \leq t \leq 5)$$

是符合表 22.2-4 中数据的一个函数, 它表示经过 t h 水位高度 y 为 $(0.3t + 3)$ m. 其图象是图 22.2-10 中点 A(0, 3) 和点 B(5, 4.5) 之间的线段 AB.

如果在这5 h内, 水位一直匀速上升, 即升速为0.3 m/h, 那么函数 $y = 0.3t + 3$ ($0 \leq t \leq 5$) 就精确地表示了这种变化规律. 即使在这5 h内, 水位的升速有些变化, 而由于每小时水位上升0.3 m是确定的, 所以这个函数也可以近似地表示水位

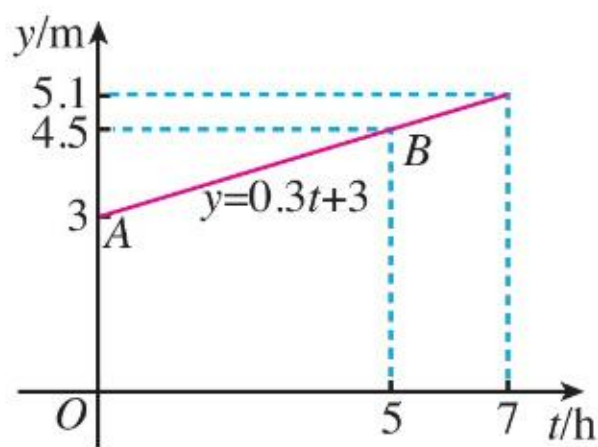


图 22.2-10

的变化规律.

(3) 如果水位的变化规律不变, 则可利用上述函数预测, 再过 2 h, 即 $t=5+2=7$ (h) 时, 水位高度

$$y=0.3 \times 7+3=5.1 \text{ (m)}.$$

把图 22.2-9 中的函数图象 (线段 AB) 向右延伸到 $t=7$ 所对应的位置, 得图 22.2-10, 从它也能看出这时的水位高度约为 5.1 m.

由例 3 可以看出, 有些函数的不同表示法之间可以转化.

练习

1. 用列表法与解析法表示 n 边形的内角和 m (单位: 度) 关于边数 n 的函数.
2. 用解析法与图象法表示等边三角形的周长 C 关于边长 a 的函数.
3. 一条小船沿直线向码头匀速前进. 在 0 min, 2 min, 4 min, 6 min 时, 测得小船与码头的距离分别为 200 m, 150 m, 100 m, 50 m. 小船与码头的距离 s (单位: m) 是时间 t (单位: min) 的函数吗? 如果是, 写出函数解析式, 画出函数图象, 并计算小船到达码头用了多长时间.

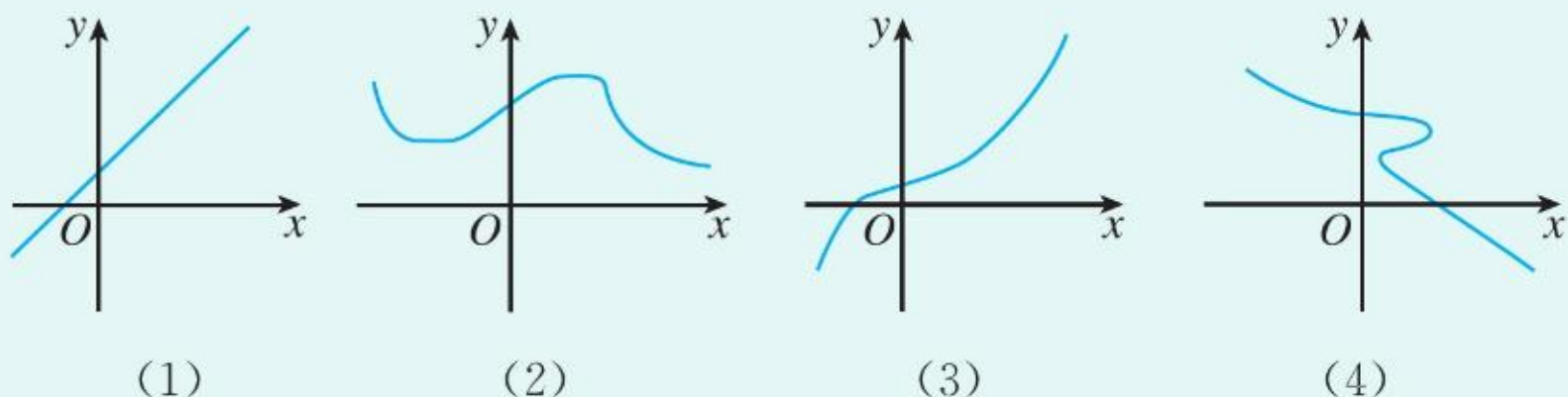
习题 22.2

复习巩固

1. 画出下列函数的图象:

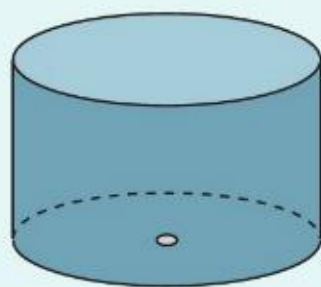
(1) $y=0.5x$; (2) $y=-\frac{3}{x}(x>0)$.

2. 下列各曲线中哪些表示 y 是 x 的函数?

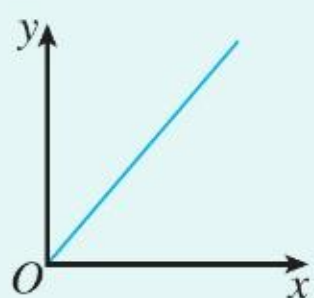


(第 2 题)

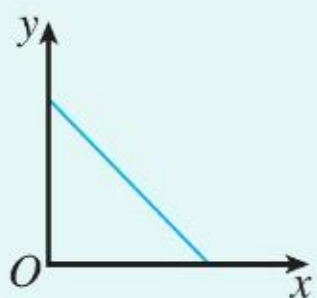
3. “漏壶”是一种古代计时器，壶内壁有刻度，在它内部盛一定量的水，水从壶下的小孔漏出，人们根据壶中水面的位置计算时间. 用 x 表示漏水时间， y 表示壶底到水面的高度，下列图象中哪个适合表示 y 与 x 的对应关系？（不考虑水量变化对压力的影响.）



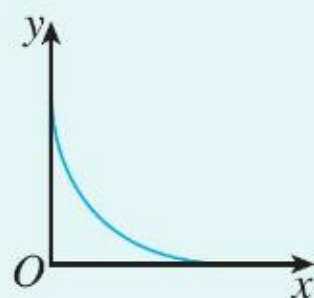
漏壶



(1)



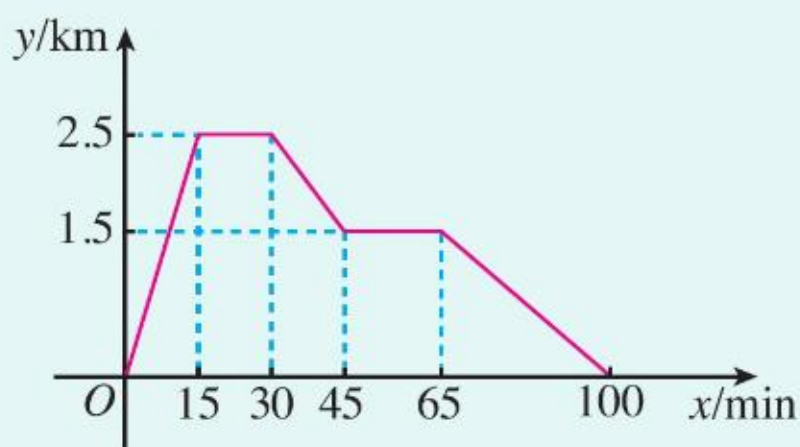
(2)



(3)

(第3题)

4. 已知刘伟家、体育场、文具店在同一条直线上. 下面的图象反映的过程是：刘伟从家跑步去体育场，在那里锻炼了一段时间后又走到文具店去买笔，然后散步走回家. 图中 x 表示时间， y 表示刘伟离家的距离.



(第4题)

根据图象回答下列问题：

- (1) 体育场离刘伟家多远？刘伟从家到体育场用了多长时间？
- (2) 体育场离文具店多远？
- (3) 刘伟在文具店停留了多长时间？
- (4) 刘伟从文具店回家的平均速度是多少？

综合运用

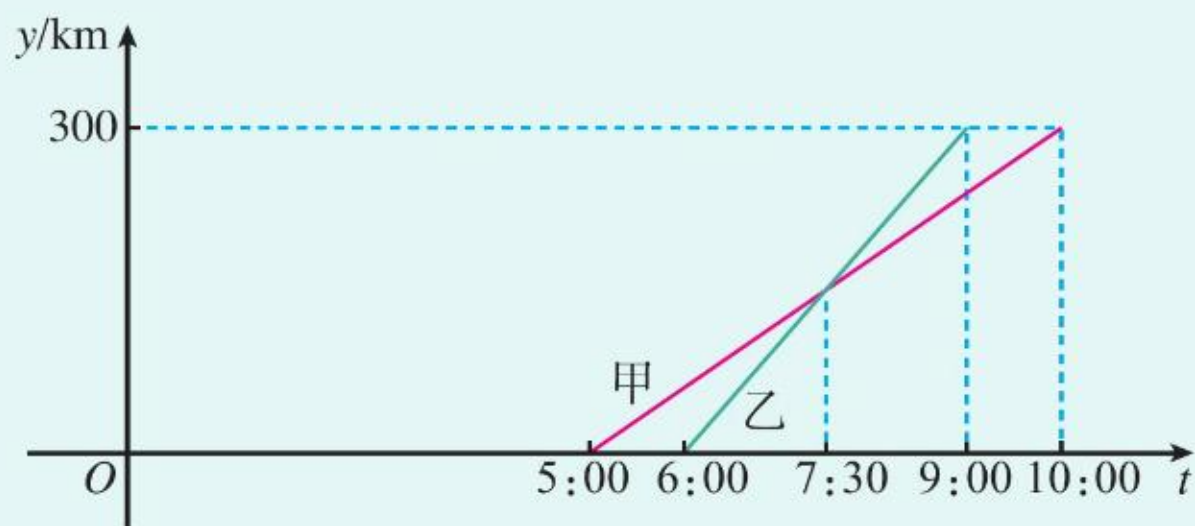
5. 某铅球运动员在出手高度、出手速度等条件相同的情况下，出手角度（在一定范围内）与掷出铅球的最远距离的数据如下表所示.

出手角度	38°	39°	40°	41°	42°
最远距离/m	21.70	21.78	21.85	21.89	21.91

- (1) 记出手角度为 x° , 掷出的最远距离为 y m, y 是 x 的函数吗? 为什么?
- (2) 从表格中的数据看, 随着出手角度的增大, 最远距离如何变化?
6. 某种银行存款的年利率为 2% , 投入 10 000 元本金. 如果存款期间每年产生的利息不计入本金重复计算利息, 求本息和 y (本金与利息的和, 单位: 元) 关于所存年数 x 的函数解析式, 并计算存期为 4 年时的本息和.
7. 正方形边长为 3, 若边长增加 x , 则面积增加 y . 求 y 关于 x 的函数解析式, 并以表格形式表示当 x 等于 1, 2, 3, 4 时 y 的值.
8. 甲、乙两车沿直路同向行驶, 车速分别为 20 m/s 和 25 m/s. 现甲车在乙车前 500 m 处, 设 x s ($0 \leq x \leq 100$) 后两车相距 y m. 用函数解析式和图象表示 y 与 x 的对应关系.

拓广探索

9. 甲、乙两辆汽车从 A 城出发前往 B 城. 在整个行程中, 两车离开 A 城行驶的路程 y 与时刻 t 的对应关系如图所示.



(第 9 题)

- (1) 从 A 城到 B 城, 甲、乙两车各行驶了多少千米?
- (2) 哪辆车先出发? 哪辆车先到 B 城?
- (3) 甲、乙两车的平均速度分别为多少?
- (4) 你还能从图中得到哪些信息?

数学活动

活动 体脂率的计算与分析

体脂率是指人体内脂肪量在体重中所占的比例，又称体脂百分数。普通人的理想体脂率，男性为 $14\% \sim 20\%$ ，女性为 $17\% \sim 24\%$ 。试估计一下你的体脂率在理想范围内吗？

测定体脂率的方法有多种，下面的计算方法便于自我检测。

在不同时间，人的腰围（记为 l ，单位：cm）和体重（记为 w ，单位：kg）会有变化，由这些变量，可以计算出不同时间的体脂率。具体计算过程如下：

(1) 计算 a ， a 是腰围 l 的函数， $a = 0.74l$ ；

(2) 计算 b ， b 是体重 w 的函数，对于男性 $b = 0.082w + 44.74$ ，对于女性 $b = 0.082w + 34.89$ ；

(3) 计算脂肪总量 d ， $d = a - b$ ；

(4) 计算体脂率 p ， $p = \frac{d}{w} \times 100\%$ 。

请以小组为单位，完成下列任务：

(1) 测量并记录每位同学的腰围 l 和体重 w 。

(2) 填写表 1。

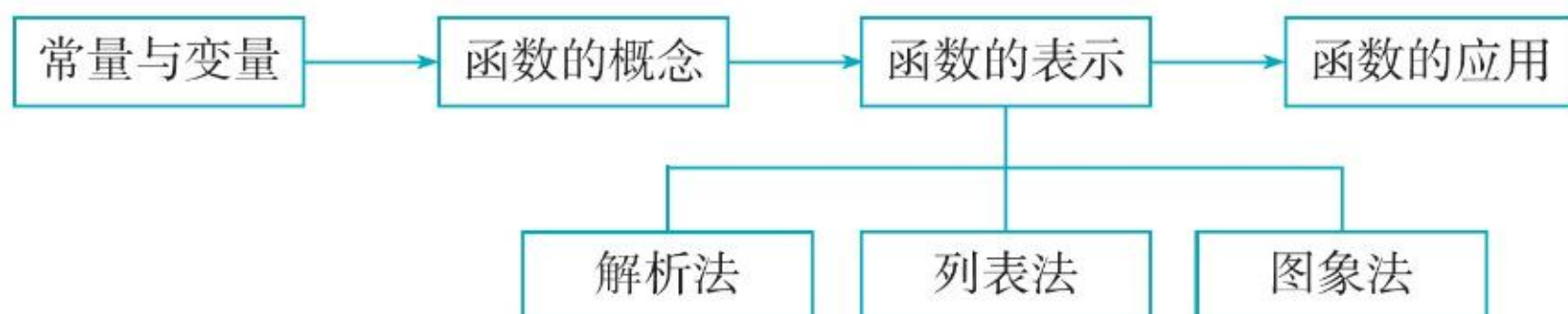
表 1 体脂率测定表

项目	同学 1	同学 2	同学 3	同学 4	
腰围 l/cm					
体重 w/kg					
$a = 0.74l$					
$b = 0.082w + 44.74$ (男)					
$b = 0.082w + 34.89$ (女)					
脂肪总量 $d = a - b$					
体脂率 $p = \frac{d}{w} \times 100\%$					

(3) 对表 1 的结果进行分析。

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

现实世界中存在着大量的运动变化现象. 本章结合一些实际问题, 分析了一个运动变化过程中两个变量之间的一种对应关系, 即每当其中某个变量取一个确定的值时, 另一个变量有唯一确定的值与其对应, 由此初步认识了函数及其表示法.

两个变量之间的函数关系可以用解析式表示, 也可以用表格或图象表示, 这三种函数的表示法各有优点. 例如, 解析法比较精确, 列表法比较直接, 而图象法比较直观等. 在研究函数的过程中, 有时为了更好地分析函数关系, 会同时使用两种甚至三种表示法, 其中结合使用解析式和图象研究函数的方法体现了数形结合的思想.

在利用函数解决问题时, 关键在于分析问题中变量之间的对应关系, 并选择适当的方法表示这种关系, 从而将实际问题转化为函数问题. 这一过程有助于提升我们的抽象能力, 增强模型观念.

请你带着下面的问题, 复习一下全章的内容吧.

1. 举例说明什么是常量和变量.
2. 举例说明两个变量 x 和 y 满足什么条件时, y 是 x 的函数.
3. 函数有哪些表示法? 它们各有什么优点? 请举例说明.
4. 举例说明如何利用函数解决实际问题.



复习题 22

复习巩固

1. A, B 两地相距 10 km, 李明从 A 地出发骑自行车以 20 km/h 的速度前往 B 地. 用 x (单位: h) 表示骑行时间, y (单位: km) 表示李明与 B 地的距离, 指出其中的常量与变量, 自变量与函数, 并写出函数解析式和自变量的取值范围.
2. 某水库的水位高度与相应的蓄水量如下表所示.

水位高度/m	95	104	121	125	128
蓄水量/ m^3	1.05×10^7	2.41×10^7	7.12×10^7	9.53×10^7	1.03×10^8

- (1) 设水库的水位高度为 x m, 蓄水量为 y m^3 , y 是 x 的函数吗? 为什么?
 - (2) 观察表格中的数据, 随着水位高度的变化, 蓄水量是如何变化的?
3. 判断下列各点是否在函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的图象上.
 $(-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2).$

综合运用

4. 某水果批发市场每次批发苹果不少于 100 kg 时, 批发价为 4.5 元/kg. 小王携带 9 000 元到这家市场批发苹果, 并以批发价买进. 设购买的苹果为 x kg, 小王付款后还剩余 y 元. 写出 y 关于 x 的函数解析式, 并指出自变量 x 的取值范围.
5. 已知等腰三角形周长为 20. 写出底边长 y 关于腰长 x 的函数解析式, 以及函数解析式中自变量的取值范围, 并在平面直角坐标系中画出它的图象.
6. (1) 画出函数 $y = |x-1|$ 的图象;
 (2) 设 $P(x, 0)$ 是 x 轴上的一个动点, 它与 x 轴上表示 -3 的点的距离为 y . 求 y 关于 x 的函数解析式, 并画出这个函数的图象.

拓广探索

7. 在同一平面直角坐标系中分别画出函数 $y=x$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 的图象. 利用这两个图象回答:
 (1) x 取什么值时, x 比 $\frac{1}{x}$ 大? (2) x 取什么值时, x 比 $\frac{1}{x}$ 小?
8. 四边形有两条对角线, 五边形、六边形分别有多少条对角线? n 边形呢? 多边形对角线的条数 y 是边数 n 的函数吗? 如果是, 写出函数解析式, 并画出函数图象.

第二十三章 一次函数

现实世界中的运动变化现象各种各样，有的简单，有的复杂. 例如，在匀速直线运动中，任意相同时间的变化都会引起相同路程的变化，即路程随时间均匀变化. 像这样，一个变量随另一个变量均匀变化的现象在现实世界中大量存在. 例如，高铁列车在匀速行驶的过程中，行驶的路程 s 随时间 t 的变化；一年期存款到期时在计算本息和的过程中，本息和 y 随本金 x 的变化；登山队员在攀登高峰的过程中，所在位置的气温 y 随海拔 x 的变化；等等.

在本章中，我们将学习刻画一个变量随另一个变量均匀变化这类现象的函数——一次函数. 通过具体问题体会一次函数的意义，结合其图象讨论它的性质，体会其在解决运动变化问题中的作用. 在此基础上，还将从一次函数的角度再次认识一次方程和不等式，并用一次函数解决一些实际问题.



23.1 一次函数的概念

函数是刻画运动变化现象中变量之间关系的数学模型. 运动变化各种各样, 函数也有不同的类型. 一次函数是一类刻画简单的运动变化的函数, 也是一类最基本的函数.

问题 某登山队大本营所在地的气温为 5°C , 海拔每升高 1 km 气温下降 6°C . 登山队员由大本营向上登高 $x\text{ km}$ 时, 他们所在位置的气温是 $y^{\circ}\text{C}$. 用函数解析式表示 y 与 x 的关系, 并求当登山队员向上登高 2 km 时, 他们所在位置的气温.



分析: y 随 x 变化的规律是: 从大本营向上, 当海拔增加 $x\text{ km}$ 时, 气温从 5°C 减少 $6x^{\circ}\text{C}$. 因此, y 关于 x 的函数解析式为

$$y = 5 - 6x.$$

这个函数也可以写为

$$y = -6x + 5.$$

当登山队员由大本营向上登高 2 km 时, 他们所在位置的气温就是当 $x=2$ 时函数 $y=-6x+5$ 的值, 即 $y=-6\times 2+5=-7(^{\circ}\text{C})$.

思考

在下列问题中, 变量之间的对应关系是函数关系吗? 如果是, 写出函数解析式. 这些函数解析式有哪些共同特征?

(1) 铁的密度约为 7.9 g/cm^3 , 铁块的质量 m (单位: g) 随它的体积 V (单位: cm^3) 的变化而变化.

(2) 每个练习本的厚度为 0.5 cm , 一些练习本摞在一起的总厚度 h (单位: cm) 随练习本的个数 n 的变化而变化.

(3) 一种计算成年人标准体重 m (单位: kg) 的方法是: 以厘米为单位量出身高 h , 再减去常数 105 , 所得差是 m 的值, m 随 h 的变化而变化.

(4) 把一个长 10 cm 、宽 5 cm 的矩形的长减少 $x\text{ cm}$, 宽不变, 矩形的面积 y (单位: cm^2) 随 x 的变化而变化.

在上面的问题中, 变量之间对应的关系都是函数关系, 表示变量之间关系的函数解析式分别为:

$$(1) m=7.9V;$$

$$(2) h=0.5n;$$

$$(3) m=h-105;$$

$$(4) y=-5x+50.$$

上面这些函数解析式都是常数 k 与自变量的积与常数 b 的和的形式.

一般地, 形如 $y=kx+b$ (k, b 是常数, $k \neq 0$) 的函数, 叫作**一次函数** (linear function), 其中 x 是自变量. 特别地, 当 $b=0$ 时, $y=kx+b$ 即 $y=kx$. 形如 $y=kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的函数, 叫作**正比例函数**, 其中 k 叫作比例系数.

例 一个弹簧不挂物体时长 12 cm, 在弹簧的弹性限度内, 每挂 1 kg 的物体, 弹簧伸长 2 cm.

(1) 求弹簧的长度 y (单位: cm) 关于所挂物体质量 x (单位: kg) 的函数解析式;

(2) 当挂 5 kg 的物体时, 弹簧的长度是多少?

解: (1) 由每挂 1 kg 的物体, 弹簧伸长 2 cm 可知, 挂 x kg 的物体时, 弹簧伸长 $2x$ cm. 因此, y 关于 x 的函数解析式为

$$y=2x+12.$$

(2) 把 $x=5$ 代入 $y=2x+12$, 得 $y=2 \times 5 + 12 = 22$.

因此, 当挂 5 kg 的物体时, 弹簧的长度是 22 cm.

练习

1. 下列函数中哪些是一次函数, 哪些又是正比例函数?

$$(1) y=-8x;$$

$$(2) y=-\frac{5}{x};$$

$$(3) C=2\pi r;$$

$$(4) y=5x^2+6;$$

$$(5) y=2(x-4).$$

2. 用函数解析式表示下列问题中 y 与 x 的关系:

(1) 某人一年内的月平均收入为 x 元, 他这一年 (12 个月) 的总收入为 y 元;

(2) 某水池有水 20 m^3 , 现在打开进水管开始进水, 进水速度为 $3 \text{ m}^3/\text{h}$, 则 $x \text{ h}$ 后水池有水 $y \text{ m}^3$.

习题 23.1

复习巩固

1. 下列函数中哪些是一次函数, 哪些又是正比例函数?

(1) $y = -0.2x$;

(2) $y = -3(x+1)$;

(3) $S = \pi r^2$;

(4) $y = \frac{x}{2}$.

2. 用函数解析式表示下列问题中 y 与 x 的关系:

(1) 一个长方体的长为 2 cm, 宽为 1.5 cm, 高为 x cm, 体积为 y cm³;

(2) 某水箱有水 10 L, 以 0.5 L/min 的速度开始往外放水, 放水时间为 x min, 剩余水量为 y L.

3. 若 y 与 x 成正比例关系, 且 $x=2$ 时, $y=8$, 写出 y 关于 x 的函数解析式, 并求 x 为何值时 $y=-4$.

综合运用

4. 某银行一年期存款利率为 1.5%, 记存入的本金为 x 元, 一年到期时的本息和为 y 元.

(1) 写出 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 存入 10 000 元, 一年到期时的本息和是多少元?

拓广探索

5. 学校发起为福利院儿童捐书包的活动, 每个书包 60 元. 张华现有积攒的零花钱 480 元, 记她用零花钱捐献的书包数为 x 个, 剩余的钱数为 y 元.

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式, 以及自变量 x 的取值范围;

(2) 若她至少要留下 180 元购买课外书, 则她最多能捐献几个书包?

23.2 一次函数的图象和性质

为了更好地借助函数认识运动变化现象，需要研究函数的性质，函数的性质能更好地刻画运动变化现象的变化规律. 在函数性质的研究中，函数图象由于其直观性，经常扮演着重要的角色.

我们从特殊的一次函数——正比例函数开始，利用图象研究其性质.

例 1 分别画出下列正比例函数的图象：

(1) $y=2x$, $y=\frac{1}{3}x$; (2) $y=-1.5x$, $y=-4x$.

解：(1) 函数 $y=2x$ 中的自变量 x 可为任意实数. 表 23.2-1 是 y 与 x 的几组对应值.

表 23.2-1

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-4	-2	0	2	4	...

如图 23.2-1，在平面直角坐标系中描出以表 23.2-1 中的值为坐标的点. 将这些点连接起来，得到一条经过原点和第三、第一象限的直线. 它就是函数 $y=2x$ 的图象.

用同样的方法，可以得到函数 $y=\frac{1}{3}x$ 的图象（图 23.2-1）. 它也是一条经过原点和第三、第一象限的直线.

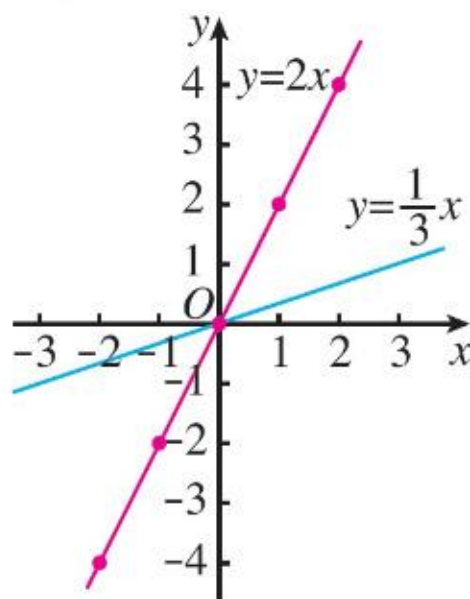


图 23.2-1

(2) 函数 $y = -1.5x$ 中的自变量 x 可为任意实数. 表 23.2-2 是 y 与 x 的几组对应值.

表 23.2-2

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	3	1.5	0	-1.5	-3	...

如图 23.2-2, 在平面直角坐标系中描出以表 23.2-2 中的值为坐标的点. 将这些点连接起来, 得到一条经过原点和第二、第四象限的直线. 它就是函数 $y = -1.5x$ 的图象.

用同样的方法, 可以得到函数 $y = -4x$ 的图象 (图 23.2-2). 它也是一条经过原点和第二、第四象限的直线.

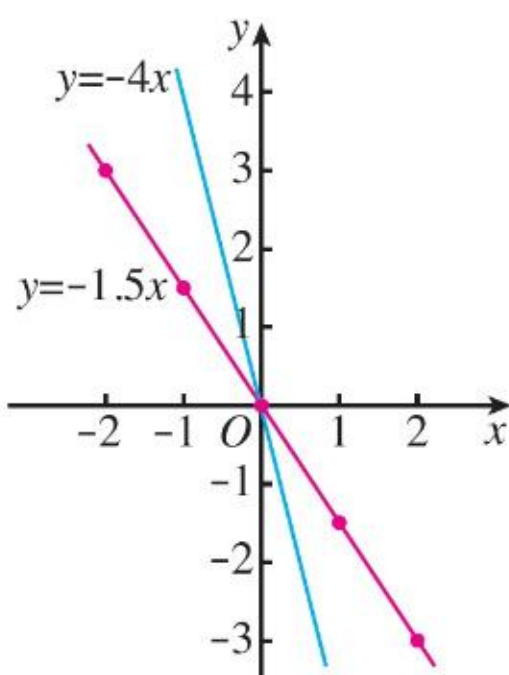


图 23.2-2

以上 4 个函数的图象都是经过原点的直线, 其中函数 $y = 2x$ 和 $y = \frac{1}{3}x$ 的图象经过第三、第一象限, 从左向右上升; 函数 $y = -1.5x$ 和 $y = -4x$ 的图象经过第二、第四象限, 从左向右下降.

一般地, 正比例函数 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象是一条经过原点的直线, 我们称它为直线 $y = kx$. 当 $k > 0$ 时, 直线 $y = kx$ 经过第三、第一象限, 从左向右上升, 即 y 随 x 的增大而增大; 当 $k < 0$ 时, 直线 $y = kx$ 经过第二、第四象限, 从左向右下降, 即 y 随 x 的增大而减小.

由正比例函数的解析式, 你能说明它的函数值 y 随自变量 x 的增大而增大 (或减小) 的道理吗?

思考

由正比例函数的图象是一条直线，你能想到画正比例函数图象的简单方法吗？

因为两点确定一条直线，而正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 的图象又是经过原点的直线，所以只要再确定正比例函数图象上一点，就可以画出正比例函数的图象. 一般地，这一点可以取点 $(1, k)$ 这个特殊点.

练习

1. 用你认为最简单的方法画出下列函数的图象：

(1) $y = \frac{3}{2}x$; (2) $y = -6x$.

2. 若点 $(2, m)$ 和点 $(-3, n)$ 都在函数 $y=kx$ ($k < 0$) 的图象上，试比较 m, n 的大小.

下面，我们研究一般的一次函数的图象和性质.

例 2 画出函数 $y=-3x$ 与 $y=-3x+1$ 的图象.

解：函数 $y=-3x$ 与 $y=-3x+1$ 中的自变量 x 可为任意实数. 列表表示几组对应值（计算并填写表 23.2-3 中空格）.

表 23.2-3

x	...	-1	-0.5	0	0.5	1	...
$y=-3x$	...			0		-3	...
$y=-3x+1$	...			1		-2	...

描点、连线，画出函数 $y=-3x$ 与 $y=-3x+1$ 的图象（图 23.2-3）.

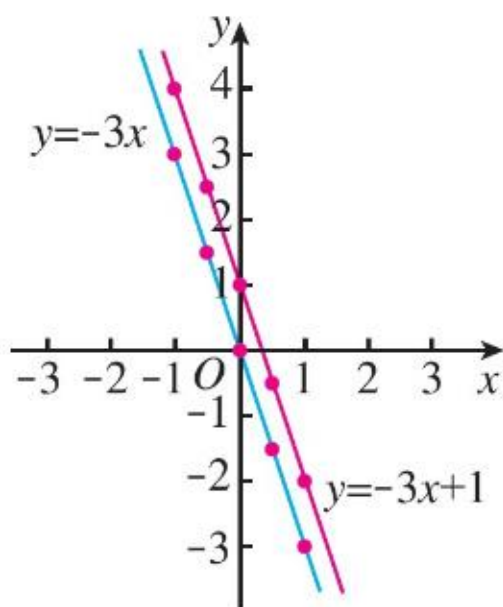


图 23.2-3

探究

比较上面两个函数的图象的相同点与不同点，填写你的观察结果：

这两个函数的图象形状都是_____，并且倾斜程度_____。函数 $y=-3x$ 的图象经过原点，函数 $y=-3x+1$ 的图象与 y 轴交于点_____，即它可以看作由直线 $y=-3x$ 向_____平移_____个单位长度而得到。

比较两个函数解析式，你能说出两个函数的图象有上述关系的道理吗？

联系上面结果，考虑一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象是什么形状，它与直线 $y=kx$ ($k \neq 0$) 有什么关系。

比较一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 与正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 的解析式，容易得出：

一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象可以由直线 $y=kx$ 平移 $|b|$ 个单位长度得到（当 $b > 0$ 时，向上平移；当 $b < 0$ 时，向下平移）。一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象也是一条直线，我们称它为直线 $y=kx+b$ 。

例 3 画出函数 $y=2x-1$ 与 $y=-0.5x+1$ 的图象。

分析： 由于一次函数的图象是直线，所以只要确定两个点就能画出它。

解： 列表表示当 $x=0$ ， $x=1$ 时两个函数的对应值（表 23.2-4）。

表 23.2-4

x	0	1
$y=2x-1$	-1	1
$y=-0.5x+1$	1	0.5

过点 $(0, -1)$ 与 $(1, 1)$ 画出直线 $y=2x-1$ ；过点 $(0, 1)$ 与 $(1, 0.5)$ 画出直线 $y=-0.5x+1$ （图 23.2-4）。

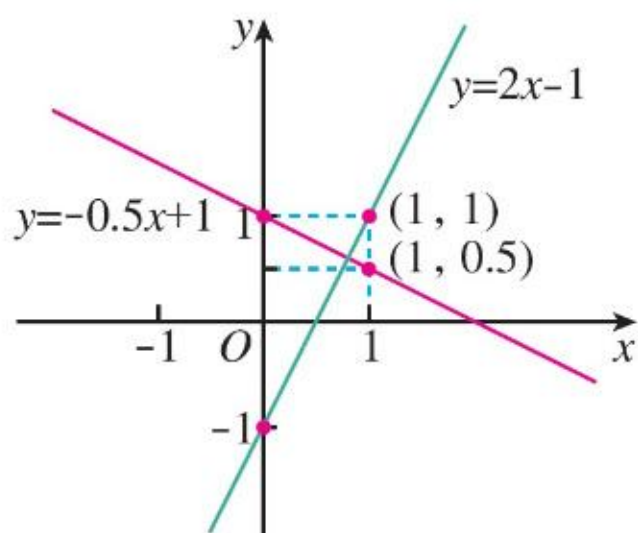


图 23.2-4

先画直线 $y=2x$ 与 $y=-0.5x$ ，再分别平移它们，也能得到直线 $y=2x-1$ 与 $y=-0.5x+1$ 。

探究

画出函数 $y=x+1$, $y=-x+1$, $y=2x+1$, $y=-2x+1$ 的图象, 观察这些直线, 总结它们从左向右上升或下降的规律.

由此联想: 一次函数的解析式 $y=kx+b$ (k, b 是常数, $k \neq 0$) 中, k 的正负对函数图象有什么影响? 你能进而归纳一次函数的性质吗?

观察前面一次函数的图象, 可以发现规律:

当 $k > 0$ 时, 直线 $y=kx+b$ 从左向右上升; 当 $k < 0$ 时, 直线 $y=kx+b$ 从左向右下降.

一般地, 一次函数 $y=kx+b$ (k, b 是常数, $k \neq 0$) 具有如下性质:

当 $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大;

当 $k < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小.

我们先通过观察发现图象(形)的规律, 再根据这些规律得出关于变量数值大小的性质, 这种数形结合的研究方法在数学学习中很重要.

练习

1. 直线 $y=2x-3$ 与 x 轴交点坐标为_____, 与 y 轴交点坐标为_____, 经过_____象限, y 随 x 的增大而_____.
2. 分别在同一平面直角坐标系中画出(1)(2)中各函数的图象, 并指出每小题中三个函数的图象有什么关系.
(1) $y=x-1$, $y=x$, $y=x+1$;
(2) $y=-\frac{1}{2}x-1$, $y=-x-1$, $y=-2x-1$.
3. 已知一次函数 $y=4x+7$, 当 $x > 2$ 时, 利用函数的性质, 求函数值 y 的取值范围.

例 4 已知一次函数的图象过点 $(2, -4)$ 与 $(-3, 11)$, 求这个一次函数的解析式.

分析: 求一次函数 $y=kx+b$ 的解析式, 关键是求出 k, b 的值. 从已知条件可以列出关于 k, b 的二元一次方程组, 进而求出 k, b .

因为图象过 $(2, -4)$ 与 $(-3, 11)$ 两点, 所以这两点的坐标必满足解析式.

解：设这个一次函数的解析式为 $y=kx+b$ ($k \neq 0$).

因为 $y=kx+b$ 的图象过点 $(2, -4)$ 与 $(-3, 11)$, 所以

$$\begin{cases} 2k+b=-4, \\ -3k+b=11. \end{cases}$$

解这个方程组, 得

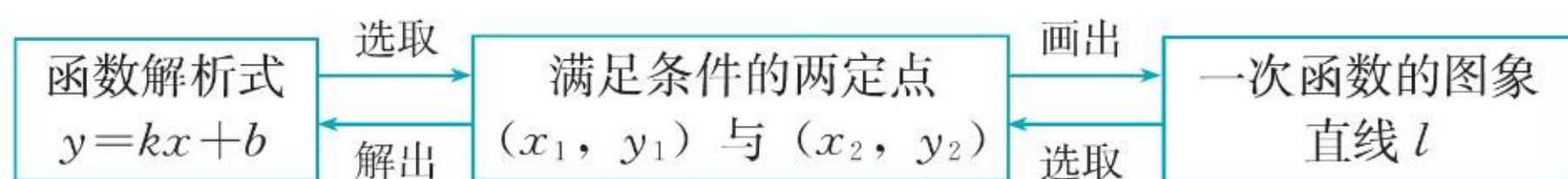
$$\begin{cases} k=-3, \\ b=2. \end{cases}$$

因此, 这个一次函数的解析式为 $y=-3x+2$.

像例 4 这样先设出函数解析式, 再根据条件确定解析式中未知的系数, 从而得出函数解析式的方法, 叫作**待定系数法**.

由于一次函数 $y=kx+b$ 中有 k 和 b 两个待定系数, 所以用待定系数法时需要根据两个条件列二元一次方程组 (以 k 和 b 为未知数). 解方程组后就能具体写出一次函数的解析式.

例 3 与例 4 从两方面说明:



例 5 一位记者乘坐汽车赴 360 km 外的乡村采访, 全程的前一部分为高速公路, 后一部分为普通公路. 汽车在高速公路和普通公路上分别以某一速度匀速行驶, 汽车行驶的路程 y (单位: km) 与时间 x (单位: h) 之间的关系如图 23.2-5 所示.

(1) 求汽车行驶的路程 y 关于时间 x 的函数解析式;

(2) 记者出发后多长时间到达采访地?

分析：问题中汽车行驶的速度不是固定不变的, 它与行驶的时间范围有关. 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, 汽车行驶的速度较快; 当 $x > 2$ 时, 汽车行驶的速度较慢. 因此, 求函数解析式时应分 $0 \leq x \leq 2$ 和 $x > 2$ 两个时段分别讨论.

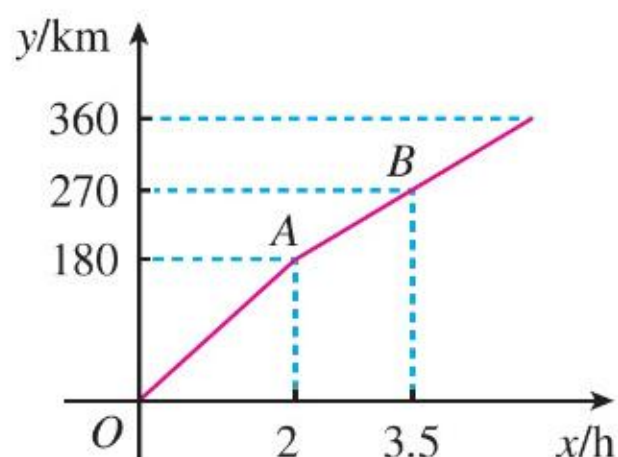


图 23.2-5

解：(1) 当 $0 \leq x \leq 2$ 时，函数图象是经过原点和点 A 的直线的一部分，设函数的解析式为 $y = k_1x$. 因为它的图象过点 $A(2, 180)$ ，所以 $180 = 2k_1$ ，解得 $k_1 = 90$.

因此，当 $0 \leq x \leq 2$ 时，函数的解析式为 $y = 90x$.

当 $x > 2$ 时，函数图象是经过 A, B 两点的直线的一部分. 我们求出直线 AB 所对应的一次函数的解析式. 设这个一次函数的解析式为 $y = k_2x + b_2$ ，把点 A, B 的坐标分别代入 $y = k_2x + b_2$ ，得

$$\begin{cases} 2k_2 + b_2 = 180, \\ 3.5k_2 + b_2 = 270. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} k_2 = 60, \\ b_2 = 60. \end{cases}$$

因此，当 $x > 2$ 时，函数的解析式为 $y = 60x + 60$.

综上，当 $0 \leq x \leq 2$ 时， $y = 90x$ ；当 $x > 2$ 时， $y = 60x + 60$.

(2) 由图象可知，当 $y = 360$ 时， $x > 2$.

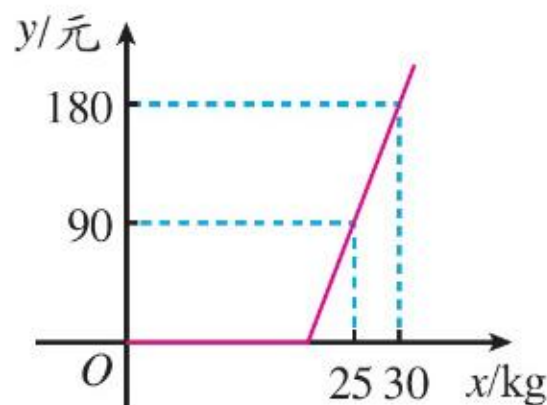
由 $360 = 60x + 60$ ，解得 $x = 5$.

因此，记者在出发 5 h 后到达采访地.

由 (2) 的解答，你能进一步确定 (1) 中函数的自变量的取值范围吗？

练习

1. 一个一次函数，当自变量 $x = 1$ 时，函数值 $y = 5$ ；当 $x = -1$ 时，函数值 $y = 1$. 求这个一次函数的解析式.
2. 一个一次函数的图象经过点 $(9, 0)$ 和 $(24, 20)$ ，求这个一次函数的解析式.
3. 一位旅客乘坐某航空公司飞机时，购买了经济舱机票. 他所托运的行李的费用 y (单位：元) 与行李的质量 x (单位：kg) 的关系如图所示. 这位旅客可免费托运的行李的最大质量是多少千克？

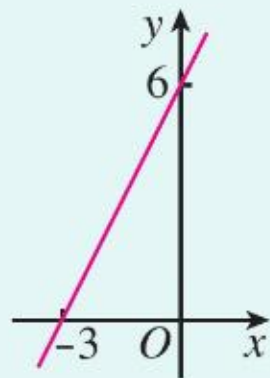


(第 3 题)

习题 23.2

复习巩固

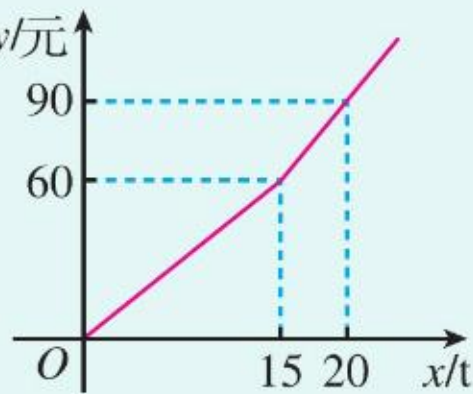
1. 一列货车以 90 km/h 的速度匀速前进. 求它的行驶路程 s (单位: km) 关于行驶时间 t (单位: h) 的函数解析式, 并画出函数图象.
2. 函数 $y = -5x$ 的图象经过第____象限, 经过点 $(0, \underline{\hspace{1cm}})$ 与点 $(1, \underline{\hspace{1cm}})$, y 随 x 的增大而_____.
3. 分别画出下列函数的图象:
 - (1) $y = 4x$;
 - (2) $y = 4x + 1$;
 - (3) $y = -4x + 1$;
 - (4) $y = -4x - 1$.
4. 如图, 求图中直线所对应的函数解析式.
5. 一个一次函数的图象经过点 $(-4, 9)$ 和 $(6, 4)$.
 - (1) 求这个一次函数的解析式;
 - (2) 画出这个一次函数的图象;
 - (3) 判断点 $(2, 5)$ 是否在这个一次函数的图象上, 并说明理由.



(第4题)

综合运用

6. 将一次函数 $y = -2x + 1$ 的图象向上平移 2 个单位长度, 能得到哪个函数的图象? 向下平移 3 个单位长度呢?
7. 已知 $(-1.3, y_1)$, $(-3, y_2)$, $(2, y_3)$ 是直线 $y = -13x + b$ (b 为常数) 上的三个点, 试比较 y_1 , y_2 , y_3 的大小.
8.
 - (1) 当 $b > 0$ 时, 函数 $y = x + b$ 的图象经过哪几个象限?
 - (2) 当 $b < 0$ 时, 函数 $y = -x + b$ 的图象经过哪几个象限?
 - (3) 当 $k > 0$ 时, 函数 $y = kx + 1$ 的图象经过哪几个象限?
 - (4) 当 $k < 0$ 时, 函数 $y = kx + 1$ 的图象经过哪几个象限?
9. 某自来水公司为了鼓励市民节约用水, 采取分段收费标准. 居民每月应缴水费 y (单位: 元) 是用水量 x (单位: t) 的函数, 其图象如图所示.
 - (1) 分别求出当 $0 \leq x \leq 15$ 和 $x > 15$ 时, y 关于 x 的函数解析式.
 - (2) 若某用户某月用水 9 t , 应缴水费多少元? 若某月缴水费 102 元, 则这个月用水多少吨?



(第9题)

拓展探索

10. 已知 y 与 $x+b$ 成正比例关系, 且当 $x=-3$ 时, $y=0$; 当 $x=2$ 时, $y=-10$.
- (1) 求 y 关于 x 的函数解析式;
 - (2) 若 $-4 < y < 2$, 求 x 的取值范围.

信息技术应用

探究函数的图象和性质

在学习函数时, 我们经常利用函数图象研究函数的性质. 由解析式画函数图象时, 一般采用描点连线法. 描出的点越多, 画出的函数图象越准确. 但是, 仅靠手工操作有时很难画出准确的图象, 而信息技术工具 (如 GeoGebra、几何画板、网络画板等计算机软件, 图形计算器等) 可以帮助我们又快又准地画出函数图象, 进而探究函数的性质. 下面介绍一些例子.

例如, 在绘制函数 $y=3x-2$ 的图象时, 可以利用一些信息技术工具的“设定参数”及“制表”功能快速列出表格, 并使用“绘制表中数据”的功能完成描点, 通过点的分布就可以大致看出图象的变化趋势 (图 1).

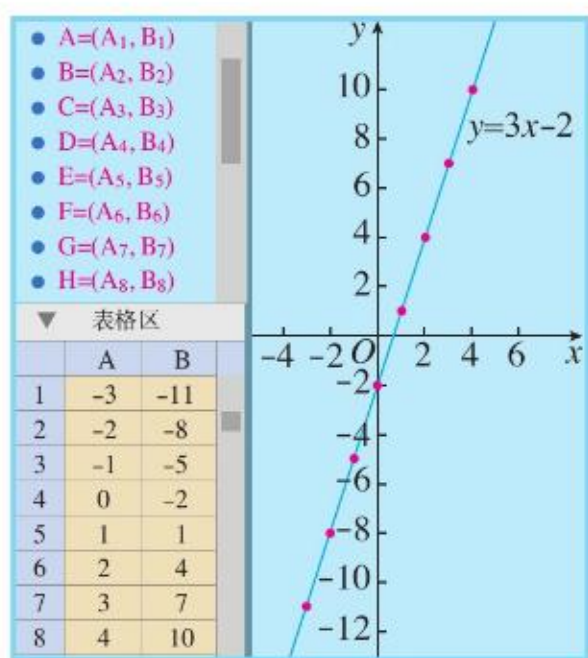


图 1

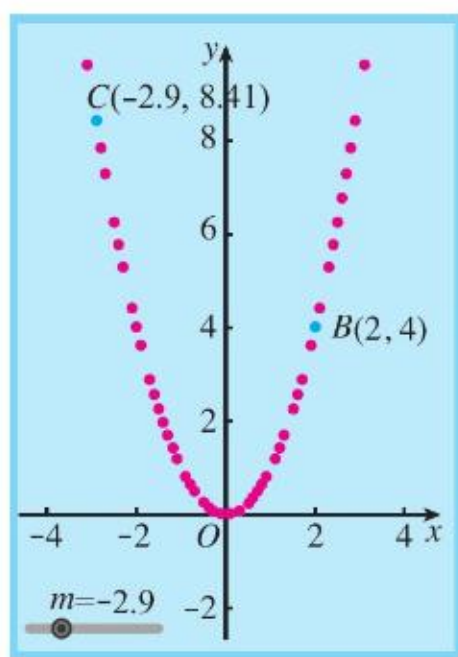


图 2

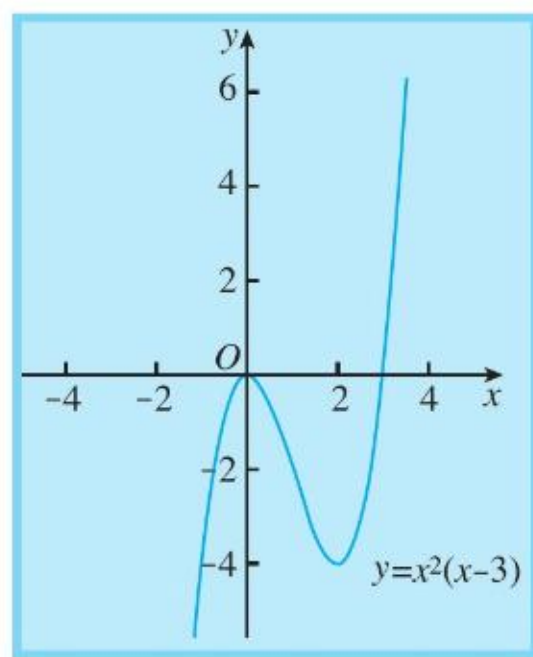


图 3

一些信息技术工具还具有对点进行“追踪”的功能. 利用这一功能绘制函数图象时, 可以先设定参数 x , y 及它们之间的关系, 然后绘制点 (x, y) 并追踪它的轨迹, 就能得到函数的大致图象. 图 2 是利用这一功能绘制的函数 $y=x^2$ 的图象.

多数信息技术工具都具有直接根据函数解析式绘制图象的功能，只要在“绘制新函数”中输入函数解析式，就可以直接得到函数的图象. 图 3 是利用这一功能绘制的函数 $y=x^2(x-3)$ 的图象.

通过观察函数图象，可以发现函数图象与函数性质之间的联系. 例如：

函数的图象特征		函数的性质
从左向右曲线呈上升状态	$\Leftrightarrow$	y 随 x 的增大而增大
从左向右曲线呈下降状态	$\Leftrightarrow$	y 随 x 的增大而减小
曲线上的最高点是 (a, b)	$\Leftrightarrow$	当 $x=a$ 时， y 有最大值 b
曲线上的最低点是 (a, b)	$\Leftrightarrow$	当 $x=a$ 时， y 有最小值 b

此外，我们还可以在动态变化中探究函数的性质. 例如，为研究正比例函数 $y=kx$ 中 k 的变化与图象的关系，我们可以利用信息技术工具绘制一条过原点的直线，并利用其“度量斜率”功能度量并显示这条直线的斜率（即 k 值）. 用鼠标拖动这条直线，使其绕原点旋转，可以发现 k 的值也会随着直线的旋转而改变.

在旋转的过程中（图 4），可以发现：

- (1) 直线经过第三、第一象限时， $k > 0$ ；
- (2) 直线经过第二、第四象限时， $k < 0$ ；
- (3) 直线由经过第二、第四象限逆时针旋转到经过第三、第一象限的过程中， k 的值随直线的旋转而不断增大.

你还能利用信息技术工具画出一些一次函数的图象，进而探究它的其他性质吗？

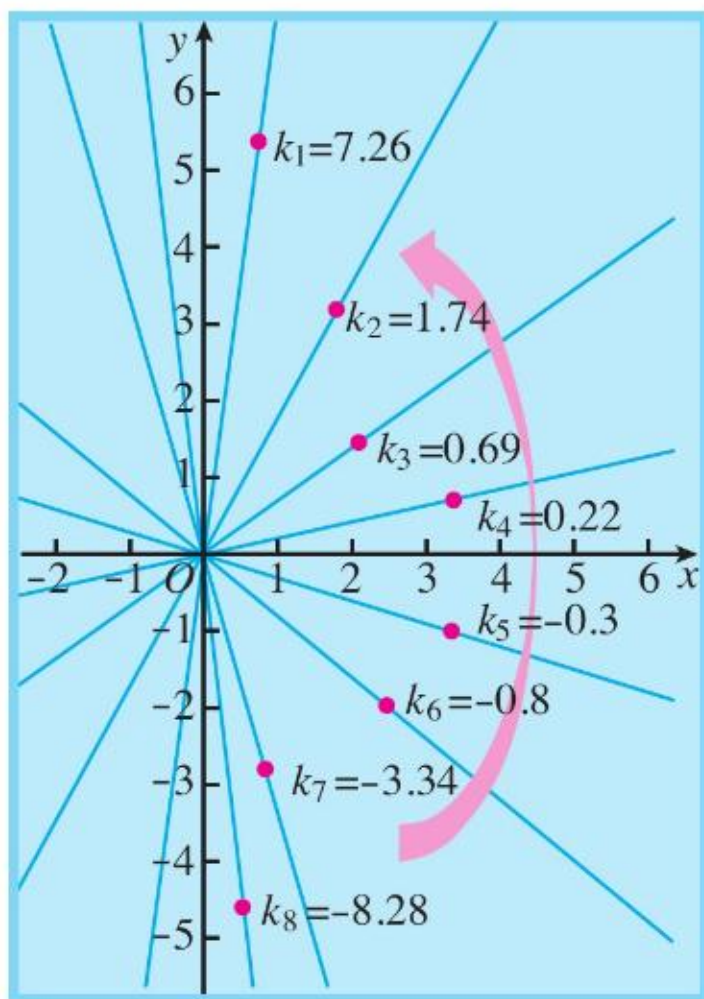


图 4

23.3 一次函数与方程（组）、不等式

方程（组）、不等式与函数之间有着密切的联系，从函数的角度认识方程（组）和不等式，能更好地建立它们之间的联系，从而更好地解决相关问题.

先来研究一次函数与一元一次方程的关系.

思考

如图 23.3-1，一次函数 $y=2x-1$ 的图象与 x 轴交点的横坐标是 0.5. 当自变量 x 的值为 0.5 时，函数值是多少？由此可以得出一元一次方程 $2x-1=0$ 的解吗？

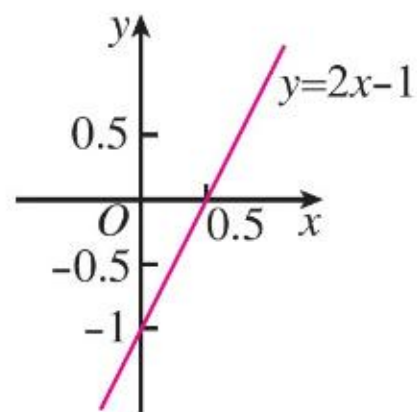


图 23.3-1

一次函数 $y=2x-1$ 的图象与 x 轴交点的横坐标为 0.5，纵坐标为 0. 这表明当自变量 x 的值为 0.5 时，函数值为 0. 由此可以得出一元一次方程 $2x-1=0$ 的解是 $x=0.5$.

因为任何一个以 x 为未知数的一元一次方程都可以变形为 $ax+b=0$ ($a \neq 0$) 的形式，所以解一元一次方程，从函数值考虑，相当于在某个一次函数 $y=ax+b$ 的函数值为 0 时，求自变量 x 的值；从函数的图象考虑，相当于已知直线 $y=ax+b$ ，求它与 x 轴的交点的横坐标.

再来研究一次函数与一元一次不等式的关系.

思考

如图 23.3-1，利用一次函数 $y=2x-1$ 的图象，你能得出函数值大于 0 时 x 的取值范围吗？函数值小于 0 时呢？由此，你能分别得出一元一次不等式 $2x-1>0$ 与 $2x-1<0$ 的解集吗？

如图 23.3-1，当图象上点的纵坐标大于 0 时，点在 x 轴上方，其横坐标大于 0.5，即函数值大于 0 时 x 的取值范围是 $x>0.5$ ；当图象上点的纵坐标小于 0 时，点在 x 轴下方，其横坐标小于 0.5，即函数值小于 0 时 x 的取值范围是

$x < 0.5$. 由此得出不等式 $2x - 1 > 0$ 的解集是 $x > 0.5$, $2x - 1 < 0$ 的解集是 $x < 0.5$.

对于可化为 $ax + b > 0$ 或 $ax + b < 0$ ($a \neq 0$) 的一元一次不等式, 在求它的解集时, 从函数值考虑, 相当于在某个一次函数 $y = ax + b$ 的值大于 0 或小于 0 时, 求自变量 x 的取值范围; 从函数的图象考虑, 相当于已知直线 $y = ax + b$, 确定这条直线上的点的纵坐标大于 0 或小于 0 时横坐标的取值范围.

最后研究一次函数与二元一次方程、二元一次方程组的关系.

先来看一个具体例子. 我们知道, 方程 $2x - y = 1$ 可以转化为 $y = 2x - 1$, 它们有相同的解. $y = 2x - 1$ 对应一次函数 $y = 2x - 1$, 它的图象是一条直线. 这条直线上每个点的坐标 (x, y) 都是方程 $2x - y = 1$ 的解, 以方程 $2x - y = 1$ 的解 (x, y) 为坐标的点都在这条直线上.

由于每个含未知数 x 和 y 的二元一次方程都可以转化为 $y = kx + b$ (k, b 是常数, $k \neq 0$) 的形式, 所以每个这样的方程都对应一个一次函数, 于是也对应一条直线. 这条直线上每个点的坐标 (x, y) 都是这个二元一次方程的解, 以这个二元一次方程的解 (x, y) 为坐标的点都在这条直线上.

思考

对于二元一次方程组 $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 3x + 5y = 8, \end{cases}$ 你能从函数的角度对解这个方程组进行解释吗?

方程组中两个二元一次方程分别对应一次函数 $y = 2x - 1$ 与 $y = -\frac{3}{5}x + \frac{8}{5}$, 解这个方程组, 可以看作求这两个一次函数的图象的交点坐标. 因此, 可以用画图象的方法得到这个二元一次方程组的解. 如图 23.3-2, 在同一平面直角坐标系中, 画一次函数 $y = 2x - 1$ 与 $y = -\frac{3}{5}x + \frac{8}{5}$ 的图象. 这两条直线

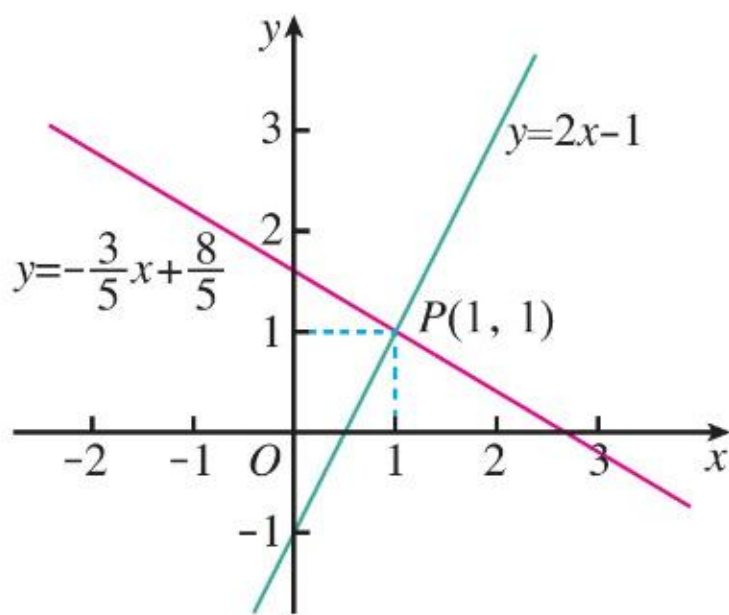


图 23.3-2

的交点坐标为 $(1, 1)$, 由此得出方程组 $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 3x + 5y = 8 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$

一般地，由含有未知数 x 和 y 的两个二元一次方程组成的每个二元一次方程组，都对应两个一次函数，于是也对应两条直线. 从“数”的角度看，解这样的方程组相当于求当自变量为何值时相应的两个函数的值相等，以及这个函数值是何值；从“形”的角度看，解这样的方程组相当于确定两条直线交点的坐标.

例 同时释放两个探测气球，1号气球从距离地面 5 m 高处出发，以 1 m/s 的速度上升；2号气球从距离地面 15 m 高处出发，以 0.5 m/s 的速度上升. 两个气球都上升了 1 min.

(1) 分别写出表示两个气球所在位置的高度 y (单位: m) 关于上升时间 x (单位: s) 的函数解析式；

(2) 两个气球在某时刻能否位于同一高度？如果能，这时气球上升了多长时间？位于什么高度？

解：(1) 气球上升时间 x 满足 $0 \leq x \leq 60$.

对于 1 号气球， y 关于 x 的函数解析式为 $y = x + 5$.

对于 2 号气球， y 关于 x 的函数解析式为 $y = 0.5x + 15$.

(2) 两个气球在某时刻位于同一高度，就是对于 x 的某个值 ($0 \leq x \leq 60$)，函数 $y = x + 5$ 和 $y = 0.5x + 15$ 有相同的值 y . 由此可以列二元一次方程组

$$\begin{cases} y = x + 5, \\ y = 0.5x + 15. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x = 20, \\ y = 25. \end{cases}$$

这就是说，当气球上升 20 s 时，两个气球都距离地面 25 m.

也可以画一次函数的图象解答此问题. 如图 23.3-3，在同一平面直角坐标系中，画一次函数 $y = x + 5$ 与 $y = 0.5x + 15$ 的图象. 这两条直线的交点坐标为 (20, 25)，这说明当气球上升 20 s 时，两个气球都距离地面 25 m.

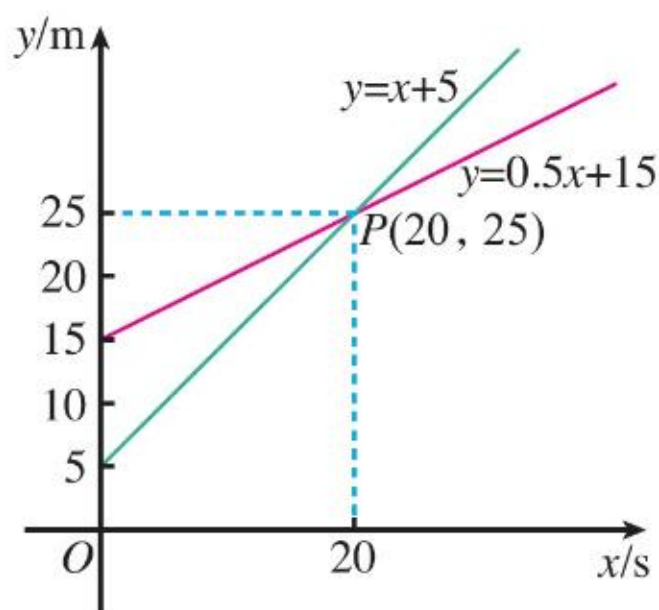


图 23.3-3

练习

1. 画一次函数 $y = -2x + 8$ 的图象, 利用图象解方程 $-2x + 8 = 0$ 及不等式 $-2x + 8 > 0$ 与 $-2x + 8 < 0$.
2. 一次函数 $y = 2x - 3$ 与 $y = ax + 2$ 的图象的交点坐标为 $(2, 1)$, 请确定方程组 $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = ax + 2 \end{cases}$ 的解和 a 的值.
3. 刘伟一家计划星期日租用新能源汽车自驾出游. 在甲公司租车, 需收取固定租金 80 元, 在此基础上再按 14 元/h 计费; 在乙公司租车, 无固定租金, 按 30 元/h 计费. 当他家租车多长时间时, 租用甲、乙两个公司汽车的费用相同?

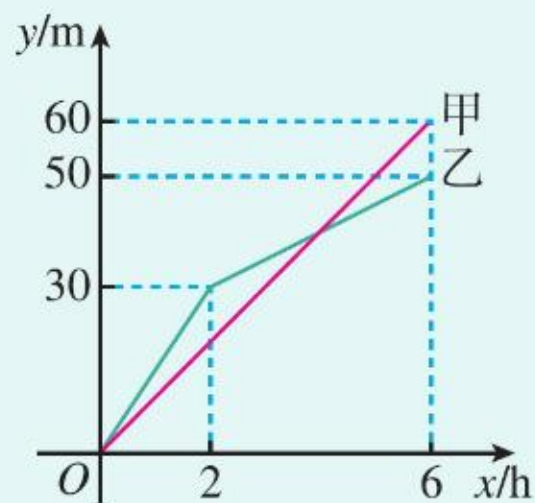
习题 23.3

复习巩固

1. 利用函数的图象解方程 $\frac{3}{2}x - 6 = 0$.
2. 利用函数的图象解不等式 $5x - 10 > 0$ 与 $-2x - 4 < 0$.
3. 利用函数的图象解方程组 $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 2x - y = 8. \end{cases}$

综合运用

4. 甲、乙两个工程队分别同时开挖两段河渠, 所挖河渠的长度 y (单位: m) 与挖掘时间 x (单位: h) 之间的关系如图所示.
 - (1) 分别求出甲队在 $0 \leq x \leq 6$ 的时段内、乙队在 $2 \leq x \leq 6$ 的时段内, y 关于 x 的函数解析式;
 - (2) 当 x 为何值时, 甲、乙两队在施工过程中所挖河渠的长度相等?



(第 4 题)

拓广探索

5. 在同一平面直角坐标系中, 画出函数 $y_1 = -\frac{1}{2}x + 2$ 与 $y_2 = 3x + 9$ 的图象, 并结合图象比较这两个函数的函数值的大小关系.

23.4 实际问题与一次函数

在日常生活中，很多问题中变量之间的对应关系可以用一次函数来刻画. 在运用一次函数解决实际问题时，一般先将实际问题抽象为一次函数问题，然后根据条件求得一次函数的解析式，再结合一次函数的图象和性质分析并解决问题.

例 某玉米种子的价格为 40 元/kg. 若一次购买不超过 2 kg 的种子，其价格不变；若一次购买超过 2 kg 的种子，超过部分的种子价格打六折.

(1) 写出付款金额关于购买量的函数解析式，并画出函数图象；

(2) 一次购买 4 kg 玉米种子，需付款多少元？

分析：付款金额与种子价格有关，而种子价格不是固定不变的，它与购买量有关. 因此，写函数解析式与画函数图象时，应分 $0 \leq x \leq 2$ 和 $x > 2$ 讨论.

解：(1) 设购买量为 x kg，付款金额为 y 元.

当 $0 \leq x \leq 2$ 时，种子价格为 40 元/kg，函数解析式为 $y = 40x$ ；

当 $x > 2$ 时，购买的种子中有 2 kg 按 40 元/kg 计价，其余的 $(x-2)$ kg (即超过 2 kg 部分) 按 24 元/kg (即六折) 计价，函数解析式为 $y = 40 \times 2 + 24(x-2) = 24x + 32$.

函数图象如图 23.4-1 所示.

(2) 因为 $4 > 2$ ，所以 $y = 24 \times 4 + 32 = 128$.

因此，一次购买 4 kg 种子，需付款 128 元.

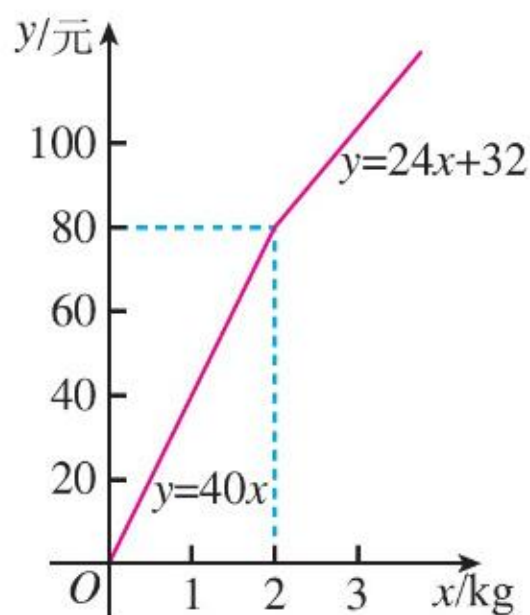


图 23.4-1

函数解析式也可以合起来表示为

$$y = \begin{cases} 40x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 24x + 32, & x > 2. \end{cases}$$

练习

1. 一个实验室在 0:00—2:00 保持 20°C 的恒温，在 2:00—4:00 匀速升温，每小时升高 5°C . 写出实验室温度 T (单位： $^\circ\text{C}$) 关于时间 t (单位：h) 的函数解析式，并画出函数图象.

2. 某市出租车的收费方式为：路程不超过 3 km 时收费 9 元，超过 3 km 部分每千米收费 2 元. 记乘客乘坐出租车的路程为 $x(x>3)$ km，乘车费为 y 元.
- (1) 求 y 关于 x 的函数解析式；
- (2) 若有一位乘客付了 23 元乘车费，则他的乘车路程是多少？

做一件事情，有时有不同的实施方案，从中选择最佳方案是十分必要的. 在选择方案时，往往需要从数学角度进行分析，涉及变量的问题常用到函数.

探究1

表 23.4-1 给出了某游泳馆 A, B, C 三种年卡套餐的收费标准.

表 23.4-1

套餐	年卡费用/元	套餐内游泳次数/次	套餐外单次收费/元
A	600	20	40
B	1 200	50	40
C	1 800	不限次	

选取哪种年卡套餐能节省游泳费用？

分析：设年游泳 x 次，则套餐 A, B, C 的游泳费用 y_1, y_2, y_3 都是 x 的函数. 在套餐 C 中，无论年游泳次数是多少，游泳费用都是 1 800 元，因此， $y_3=1\ 800$ ($x\geq 0$). 若能得到 y_1, y_2 关于 x 的函数解析式，则利用函数解析式，通过方程、不等式或函数图象就能比较 y_1, y_2, y_3 的大小，从而对年卡套餐作出选择.

在套餐 A 中，考虑游泳费用 y_1 时，要把年游泳次数 x 分为不超过 20 次和超过 20 次两种情况，得到刻画套餐 A 的游泳费用的函数解析式

$$y_1 = \begin{cases} 600, & 0 \leq x \leq 20, \\ 600 + 40(x - 20), & x > 20. \end{cases}$$

化简，得

$$y_1 = \begin{cases} 600, & 0 \leq x \leq 20, \\ 40x - 200, & x > 20. \end{cases}$$

这个函数的图象如图 23.4-2 所示.

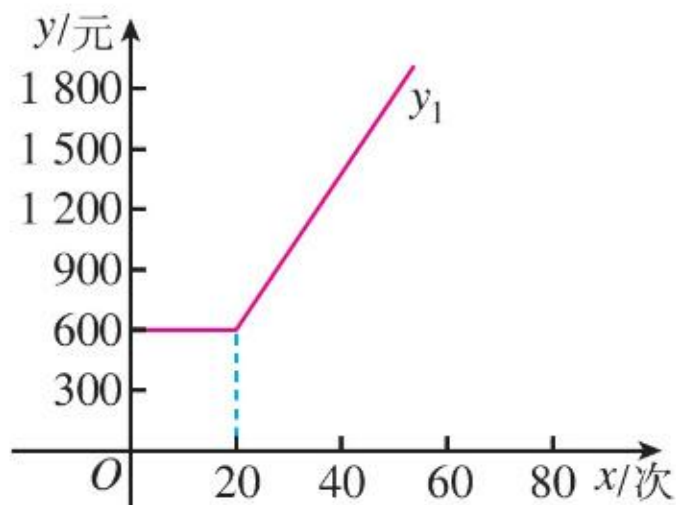


图 23.4-2

类似地,可以得到刻画套餐 B 的游泳费用 y_2 关于年游泳次数 x 的函数解析式

$$y_2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

在图 23.4-2 中画出 y_2 , y_3 的图象,结合函数图象与解析式,可知:

当年游泳次数 $\underline{\hspace{2cm}}$ 时,选择套餐 A 能节省游泳费用;

当年游泳次数 $\underline{\hspace{2cm}}$ 时,选择套餐 B 能节省游泳费用;

当年游泳次数 $\underline{\hspace{2cm}}$ 时,选择套餐 C 能节省游泳费用.

练习

某公司要印制产品宣传材料.甲印刷厂的收费方案是:收 1 500 元制版费,每份材料再收 1 元印制费;乙印刷厂的收费方案是:不收制版费,每份材料收 2.5 元印制费.

- (1) 分别写出两家印刷厂的收费 y (单位:元) 关于印制宣传材料数量 x (单位:份) 的函数解析式;
- (2) 选择哪家印刷厂比较合算?

探究2

某学校计划在总费用不超过 2 300 元的情况下,租用客车送 234 名学生和 6 名教师集体外出活动,每辆客车上至少要有 1 名教师.现有甲、乙两种大客车,它们的载客量和租金如表 23.4-2 所示.

表 23.4-2

客车种类	载客量/人	租金/元
甲	45	400
乙	30	280

- (1) 共需租多少辆客车?
- (2) 给出最节省费用的租车方案.

分析: (1) 可以从乘车人数的角度考虑租多少辆客车,要注意到以下要求:

- ① 要保证 240 名师生乘车都有座位;

②要使每辆客车上至少有 1 名教师.

根据①可知, 客车总数不能小于_____; 根据②可知, 客车总数不能大于_____. 综合起来可知客车总数为_____.

(2) 租车费用与所租车的种类有关. 可以看出, 当客车总数 a 确定后, 在满足各项要求的前提下, 尽可能少地租用甲种客车可以节省费用.

设租用 x 辆甲种客车, 则租车费用 y (单位: 元) 是 x 的函数, 即

$$y = 400x + 280(a - x).$$

将 (1) 中确定的 a 的值代入上式, 化简这个函数, 得

$$y = \underline{\hspace{2cm}}.$$

为使 240 名师生乘车都有座位, x 不能小于_____; 为使租车费用不超过 2 300 元, x 不能超过_____. 综合起来可知 x 的取值为_____.

在考虑上述问题的基础上, 你能得出几种不同的租车方案? 为节省费用应选择其中哪种方案? 试说明理由.

归纳

解决含有多个变量的问题时, 可以分析这些变量之间的关系, 从中选取一个取值能影响其他变量的值的变量作为自变量. 然后根据问题的条件寻求可以反映实际问题的函数, 以此作为解决问题的数学模型.

练习

某文具店购进 A, B 两种型号的计算器进行销售, 其进价与售价如下表所示.

型号	进价/元	售价/元
A	22	32
B	19	25

为了满足市场需求, 第二季度文具店计划用不超过 2 000 元的资金采购这两种计算器共 100 台. 若所采购的计算器能全部售出, 给出利润最大的进货方案, 并求出最大利润是多少.

习题 23.4

复习巩固

1. 某公司销售人员的个人月收入与其每月的销售量成一次函数关系, 当其售出 100 件货品时月收入为 2 800 元, 售出 200 件货品时月收入为 3 400 元, 则当其月收入为 4 600 元时, 售出的货品为_____件.
2. 某品牌服装开展促销活动, 原价每件 80 元的服装, 如果购买超过 3 件, 则超过部分可享受八折优惠, 求顾客所付款 y (单位: 元) 与所购服装数 x ($x > 3$, 单位: 件) 之间的函数解析式.
3. 某网店销售一款护眼台灯, 在销售过程中发现, 这款护眼台灯销售单价为 60 元时, 每星期卖出 100 个. 如果调整销售单价, 每降价 1 元, 每星期就可多卖出 2 个. 现网店决定降价销售, 设销售单价为 x 元, 每星期的销售量为 y 个.
 - (1) 求 y 关于 x 的函数解析式;
 - (2) 当销售单价为 52 元时, 求每星期的销售总额.
4. 为了鼓励居民节约用电, 某市实行居民生活用电阶梯电价方案. 当每月用电量不超过 240 kW · h 时, 按 0.45 元/(kW · h) 收费; 当用电量超过 240 kW · h 时, 超过部分按 0.55 元/(kW · h) 收费. 设一个家庭某月用电量为 x kW · h, 应缴电费为 y 元.
 - (1) 求 y 关于 x 的函数解析式;
 - (2) 如果这个家庭某月的电费为 141 元, 那么此家庭这个月的用电量是多少?

综合运用

5. 某剧院的观众席座位数从前向后依次增加, 部分数据如下表所示.

排数 x	1	2	3	4	...
座位数 y	50	52	54	56	...

- (1) 按照上表所示的规律, 当 x 每增加 1 时, y 如何变化?
 - (2) y 是 x 的函数吗? 如果是, 写出座位数 y 与排数 x 之间的函数解析式.
 - (3) 按照上表所示的规律, 第 20 排有多少个座位?
6. 甲、乙两家商场平时以同样的价格出售相同的商品. 春节期间两家商场都开展促销活动, 其中甲商场所有商品按八折出售, 乙商场对一次购物中实付金额超过 200 元的部分打七折.
 - (1) 以 x (单位: 元) 表示商品原价, y (单位: 元) 表示购物实付金额, 分

别就两家商场的促销方式写出 y 关于 x 的函数解析式；

(2) 在同一平面直角坐标系中画出 (1) 中函数的图象；

(3) 春节期间选择去哪家商场购物更省钱？

7. 某外卖平台招聘外卖骑手，并提供了如下两种月工资方案：

方案一：每月底薪 2 000 元，每完成一单外卖业务再提成 2 元.

方案二：每月无底薪，每完成一单外卖业务提成 6 元.

设骑手每月完成的外卖业务量为 x 单 (x 为正整数)，方案一、方案二中骑手的月工资分别为 y_1 元、 y_2 元.

(1) 分别写出 y_1 , y_2 关于 x 的函数解析式.

(2) 若李明是此外卖平台的一名骑手，从月工资收入的角度考虑，他应该选择哪种月工资方案？试说明理由.

拓展探索

8. 图中的折线表示刘伟骑车离家的距离 y 与时间 x 的关系. 他 9:00 离开家，15:30 回到家. 请你根据这个折线图回答下列问题：

(1) 何时刘伟离家最远？这时刘伟离家多远？

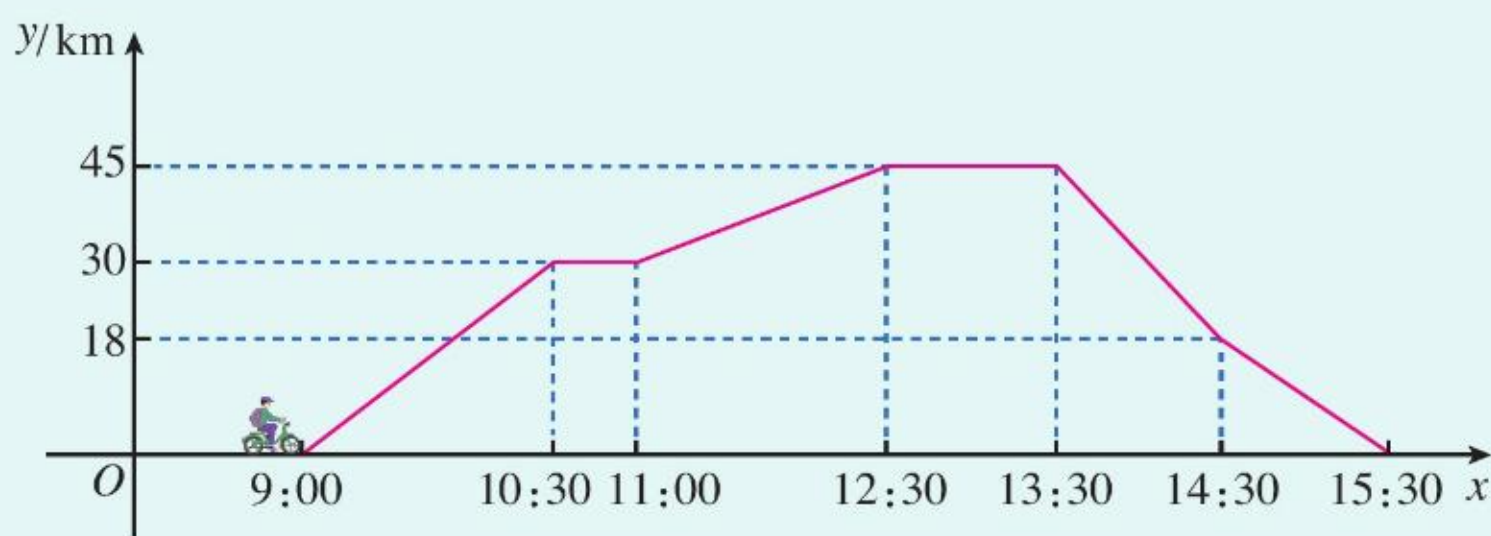
(2) 何时刘伟开始第一次休息？休息多长时间？这时刘伟离家多远？

(3) 11:00—12:30 刘伟骑了多少千米？

(4) 刘伟在 9:00—10:30 和 10:30—12:30 的平均速度各是多少？

(5) 刘伟返家时的平均速度是多少？

(6) 14:30 时刘伟离家多远？回家路上，何时刘伟距家 6 km？



(第 8 题)

9. 快递公司为提高快递分拣的速度，决定购买机器人来代替人工分拣，两种型号的机器人的工作效率和价格如下表所示.

机器人型号	每台机器人每小时分拣快递量/件	每台机器人价格/万元
甲	1 000	5
乙	800	3

这个公司计划购买这两种型号的机器人共 10 台，并且使这 10 台机器人每小时分拣快递量的总和不少于 8 500 件.

- (1) 设购买甲种型号的机器人 x 台，购买这 10 台机器人所花的总费用为 y 万元，求 y 关于 x 的函数解析式.
- (2) 在购买的 10 台机器人中，购买几台甲种型号的机器人能使所花的总费用最少？最少费用是多少？

数学活动

活动1 水龙头的滴水量

水龙头关闭不严会造成滴水，为了调查漏水量与漏水时间的关系，可进行以下的实验与研究.

(1) 在滴水的水龙头下放置一个能显示水量的容器，每 5 min 记录一次容器中的水量，并填写下表.

时间 t/min	0	5	10	15	20	25	30
水量 V/mL							

(2) 建立平面直角坐标系，以横轴表示时间 t ，纵轴表示水量 V ，描出以上述实验所得数据为坐标的各点，并观察它们的分布规律.

(3) 试写出 V 关于 t 的函数解析式，并据此估算这种漏水状态下一天的漏水量.

活动2 纸杯的高度

图 1 是 1 个纸杯和 6 个叠放在一起的纸杯的示意图. 请你自行定义变量和常量来建立一个函数模型，探究叠放在一起的杯子的总高度与杯子数量之间的关系.

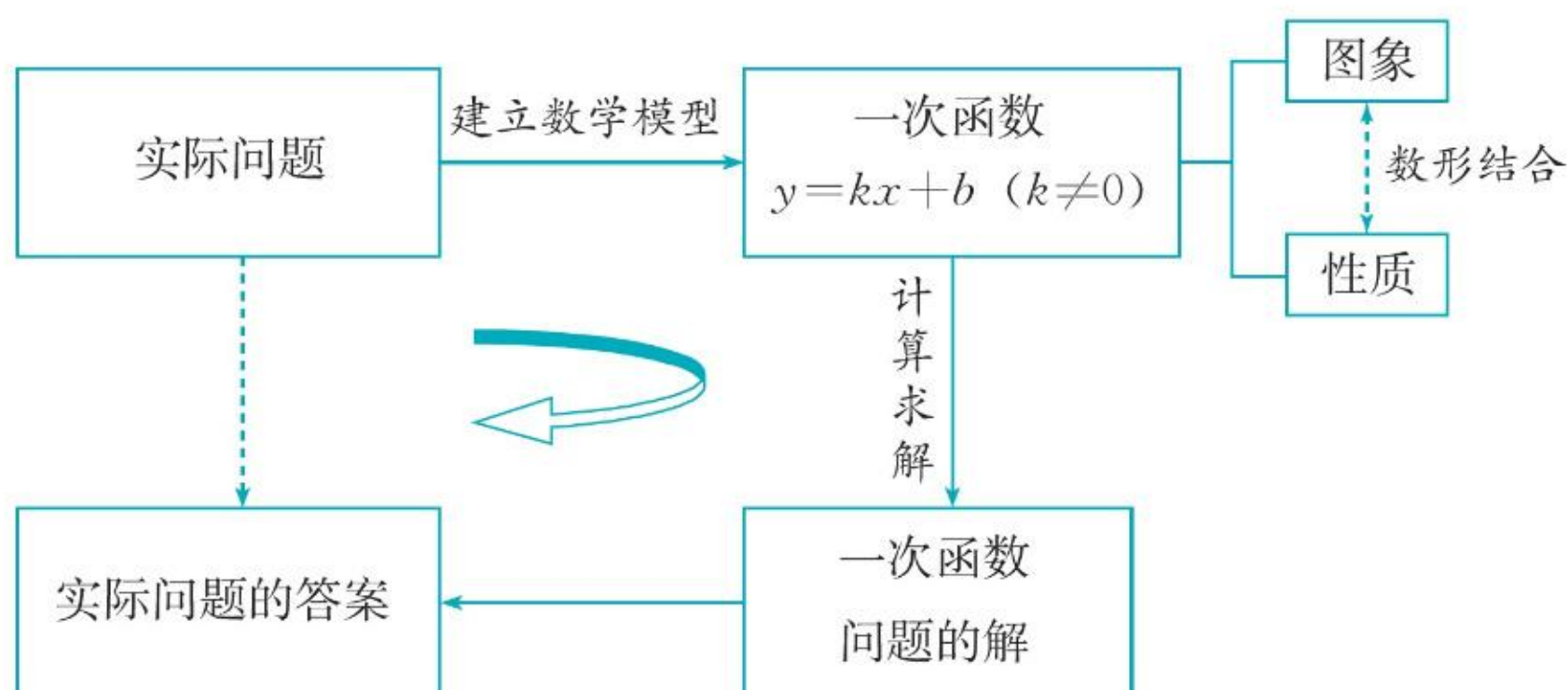
当一定数量的纸杯叠放在一起时，你能根据探究得到的数量关系预估纸杯的高度吗？



图 1

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

在本章中，我们从具体问题出发，分析其反映的运动变化规律的特征，抽象得到一次函数的概念，并给出其表示方法；进而利用图象数形结合地研究了一次函数的性质；接着研究了一次函数与方程（组）、不等式之间的关系；最后运用一次函数分析和解决了一些实际问题。这一过程体现了研究一类函数的基本内容、思路和方法，能进一步提升抽象能力，增强模型观念。

一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 是一类最基本的函数，它刻画了一个变量随另一个变量均匀变化的变化规律，正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 是一次函数的特例。一次函数的图象是一条直线，利用图象可以直观地分析函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的增减性。观察发现，当 $k > 0$ （或 $k < 0$ ）时，图象从左向右上升（或下降），这表明函数 y 的值随自变量 x 的增大而增大（或减小）。利用图象研究函数的方法体现了数形结合的思想。

利用一次函数解决问题时，关键在于分析问题中变量之间的对应关系，并考虑如何表示这种关系，从而将实际问题转化为一次函数问题。通常我们可以根据已知条件用待定系数法求出函数解析式，再利用解析式

探究解决某些问题.

请你带着下面的问题,复习一下全章的内容吧.

1. 什么样的函数是一次函数? 什么样的函数是正比例函数?
2. 正比例函数的图象有什么特点? 一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象是什么形状? 怎样画一次函数的图象?
3. 常数 k 对一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象有什么影响? 由此能说明 y 与 x 之间的什么变化规律?
4. 由一条不平行于坐标轴的已知直线,能求出它对应的一次函数的解析式吗? 如果能,应怎样求? 由此体会由形到数的转化.
5. 一次函数与一元一次方程有什么关系? 一次函数与一元一次不等式有什么关系? 一次函数与二元一次方程(组)有什么关系? 请举例说明.
6. 请举例说明利用一次函数解决实际问题的过程.



复习题 23

复习巩固

1. 王芳现有存款 1 500 元. 她计划今后三年每月存 50 元. 存款总金额 y (单位: 元) 将随时间 x (单位: 月) 的变化而变化. 写出 y 关于 x 的函数解析式.
2. 判断下列各点是否在直线 $y=2x+6$ 上, 并求这条直线与坐标轴的交点坐标.

$$(-5, -4), (-7, 20), \left(-\frac{7}{2}, 1\right), \left(\frac{2}{3}, 7\frac{1}{3}\right).$$

3. 填空:

(1) 直线 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$ 经过第_____象限, y 随 x 的增大而_____;

(2) 直线 $y=3x-2$ 经过第_____象限, y 随 x 的增大而_____.

4. 根据下列条件分别确定函数 $y=kx+b$ 的解析式:

(1) y 与 x 成正比例, 当 $x=5$ 时, $y=6$;

(2) 直线 $y=kx+b$ 经过点 $(3, 6)$ 与 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

5. 根据函数 $y=3x-15$ 的性质或图象, 确定 x 取何值时:

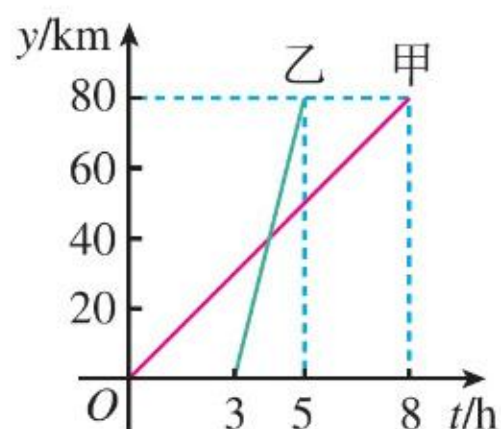
- (1) $y>0$; (2) $y<0$.

综合运用

6. 某快递公司省内寄件的收费标准为: 不超过 1 kg 的物品需付 13 元, 超过 1 kg 后每增加 1 kg (不足 1 kg 按 1 kg 计) 需增加快递费 2 元. 设寄出 x kg (x 为大于 1 的整数) 物品的快递费为 y 元, 写出 y 关于 x 的函数解析式.

7. 甲骑自行车, 乙骑摩托车, 沿相同路线由 A 地到 B 地, 行驶路程 y (单位: km) 与行驶时间 t (单位: h) 之间的关系如图所示. 根据图象回答下列问题:

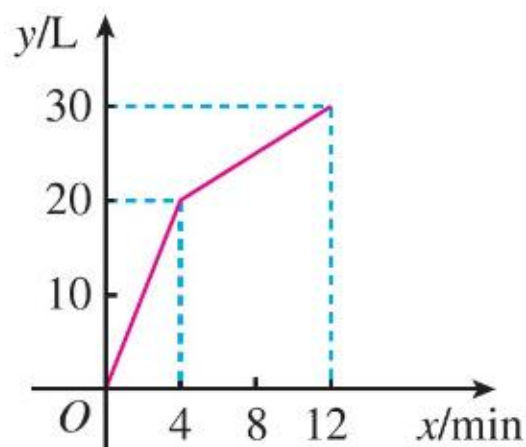
- (1) A, B 两地的路程是_____ km.
 (2) 出发较早的是_____, 早_____ h.
 (3) 到达较早的是_____, 早_____ h.
 (4) 甲的速度为_____, 乙的速度为_____.
 (5) 乙在距 A 地多少千米处追上甲? 此时甲行驶了多少小时?



(第 7 题)

8. 一个有进水管与出水管的容器, 从某时刻开始 4 min 内只进水不出水, 在随后的 8 min 内既进水又出水, 每分钟的进水量和出水量是两个常数. 容器内的水量 y (单位: L) 与时间 x (单位: min) 之间的关系如图所示.

- (1) 当 $0\leq x\leq 4$ 时, 求 y 关于 x 的函数解析式;
 (2) 当 $4<x\leq 12$ 时, 求 y 关于 x 的函数解析式;
 (3) 每分钟进水、出水各多少升?



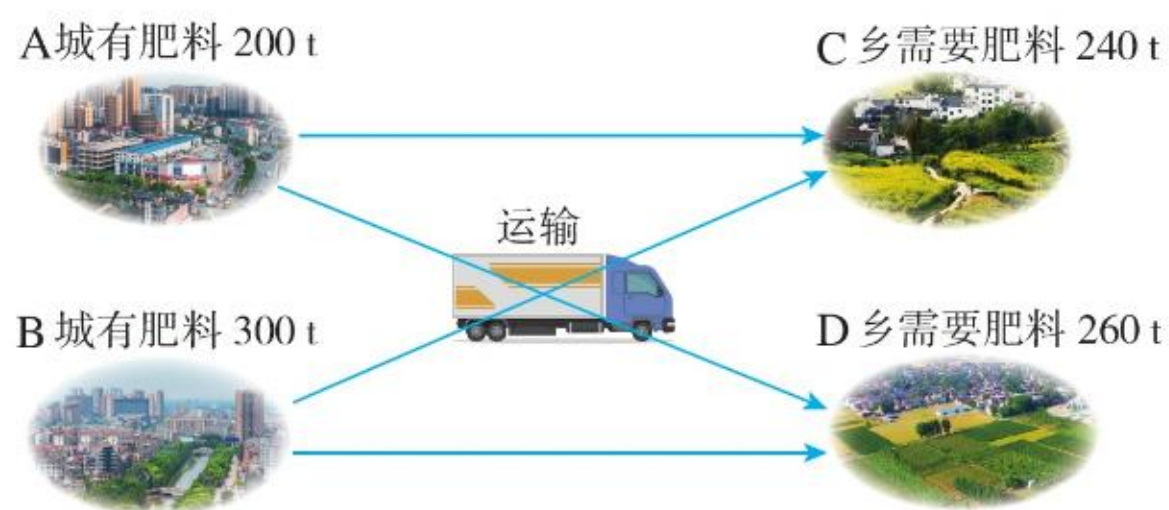
(第 8 题)

9. 甲、乙两家体育用品商店以同样的价格出售相同的乒乓球拍和乒乓球, 乒乓球拍每副定价 30 元, 乒乓球每盒定价 5 元. 现两家商店开展促销活动, 在甲店每购买一副球拍赠一盒乒乓球; 在乙店每购买一副球拍或一盒乒乓球都按定价的九折优惠. 某班需购买球拍 4 副, 乒乓球若干盒 (不少于 4 盒).

- (1) 设这个班购买乒乓球 x 盒, 在甲店的付款金额为 $y_{\text{甲}}$ 元, 在乙店的付款金额为 $y_{\text{乙}}$ 元, 分别写出在两家商店的付款金额 $y_{\text{甲}}$, $y_{\text{乙}}$ 与乒乓球盒数 x 之间的函数解析式.
 (2) 购买几盒乒乓球时在两家商店的付款金额一样?
 (3) 如何根据购买乒乓球的数量选择在哪家商店购买?

拓广探索

10. A 城有肥料 200 t, B 城有肥料 300 t. 现要把这些肥料全部运往 C, D 两乡. 从 A 城往 C, D 两乡运肥料的费用分别为 20 元/t 和 25 元/t; 从 B 城往 C, D 两乡运肥料的费用分别为 15 元/t 和 24 元/t. 现 C 乡需要肥料 240 t, D 乡需要肥料 260 t, 怎样调运可使总运费最少?



(第 10 题)

综合与实践

音乐与数学

我们常说，丝竹之声，天籁之音，是指音乐能给人听觉上的享受。唐代诗人白居易在千古名篇《琵琶行》中，对琵琶女弹奏琵琶有过精彩的描述：

大弦嘈嘈如急雨，小弦切切如私语。
嘈嘈切切错杂弹，大珠小珠落玉盘。
间关莺语花底滑，幽咽泉流冰下难。
冰泉冷涩弦凝绝，凝绝不通声暂歇。
别有幽愁暗恨生，此时无声胜有声。
银瓶乍破水浆迸，铁骑突出刀枪鸣。
曲终收拨当心画，四弦一声如裂帛。

如何用数学描述音乐呢？

音乐是声音的艺术。生活中，有些声音十分悦耳，也有些声音非常刺耳。乐器之间的合奏，也存在上述现象。你知道这是为什么吗？

人们经过漫长的研究，制定了多种音律规则，即音乐律制，如三分损益法、五度相生律以及目前普遍采用的十二平均律。这些音乐律制的原理是什么？背后有哪些数学知识？让我们从这些问题开始，探究音乐与数学的关系，用数学描述音乐吧。

活动目标

认识音乐与数学的关系：数学在音乐律制发展中的作用，从函数角度分析五线谱，分析乐器结构中蕴含的数学知识等。



琵琶行 [清] 改琦 作

活动准备

1. 查阅资料，了解乐音的四个基本要素——音强、音高、音值、音色。
2. 乐音的音高与声波的振动频率有关。查阅资料，了解这两者之间的关系。
3. 了解弦的振动频率与弦长的关系。

活动任务

活动一 探究音乐律制中蕴含的数学原理

任务1 我们知道，有些声音混合在一起，听上去十分悦耳，也有些声音混合在一起听着非常刺耳。查阅资料回答什么样的声音合奏起来比较和谐，你能从数学角度解释吗？

任务2 古代音律学家很早就知道声音悦耳的秘密。由此，音乐家发明了各种制定音乐律制的方法，著名的有中国古代的三分损益法，利用这种方法可以生成“宫、商、角、徵、羽”五声音阶。而西方的五度相生律可以生成被命名为“毕达哥拉斯音阶”的七声音阶。查阅资料了解这两种音乐律制的制谱方法，它们有什么共通之处吗？

任务3 三分损益法、五度相生律这一类制谱方法，有个共同的问题：它们所生成的音阶都不能回归本律，即所得到的音和最初的音不能形成八度关系。这给音乐作品的转调带来了困难。以三分损益法为例，你能从数学角度解释为什么存在上述不足吗？

任务4 为了弥补上述不足，中国历代音律学家不断探索，直到明代律学家朱载堉（1536—1611）创立了十二平均律，上述问题才得以彻底、完整的解决。

(1) 查阅资料，了解十二平均律的制谱方法。

(2) 由前面的研究可知，十二平均律中相邻两个音的频率之比相等，朱载堉称之为“密率”（见《律吕精义》）。事实上，“密率”是一个无理数。朱载堉通过他自制的一个81档双排位大算盘（图1）成功地算出了“密率”的估计值，将其精确到了25位有效数字，这在当时条件下是难以想象的。他是世界历史上



图1

将数学与音乐完美结合的杰出律学家. 试列式计算十二平均律中相邻两个音的频率之比的值.

活动二 从函数角度分析乐谱

音乐律制建立之后, 人们发明了多种记录乐谱的方式, 目前最常用的方法是简谱和五线谱两种.

简谱中音符、节拍的记法都采用了数学元素; 而五线谱则是一种接近于数学图形的语言, 这是因为在五线谱中, 我们能清楚地看到音的高低位置. 以歌曲《保卫黄河》(光未然词, 冼星海曲) 的片段为例(图 2), 如果将音符的符头顺次连接, 就能得到一条反映乐曲的音高及音值(时长)变化的旋律线. 这条旋律线与刚刚学过的函数图象是不是有异曲同工之妙? 能不能用函数的眼光分析五线谱呢? 尝试一下吧!



图 2

任务 1 图象由点组成, 在画函数图象时, 需要在平面直角坐标系中描出点的位置, 这就需要先确定点的横、纵坐标. 类似地, 人们在记谱时, 也是通过记录乐音的音高和音值这两个基本要素来记录乐音. 查阅资料, 分析五线谱是如何记录乐音的上述两个要素的? 五线谱中记谱的方式和在平面直角坐标系中刻画点的位置有什么相似性?

任务 2 能否用函数刻画乐曲的旋律? 以图 2 中的乐曲片段为例, 思考上述五线谱中, 在乐谱刻画的时间段内, 音符的音高和时长有什么关系? 你能在平面直角坐标系中将图 2 中的乐曲片段刻画出来吗? 和你的同伴一起尝试一下吧!

提示: 可以通过下面几步来完成上述任务.

(1) 结合乐音的记谱方法, 在平面直角坐标系中刻画乐曲的旋律时, 确定横轴和纵轴各自表示的意义;

(2) 根据五线谱中记录的音符的位置和时长, 在平面直角坐标系中找到音符对应点的位置;

(3) 用线段表示音符对应的时长。

任务3 通过上述步骤，可以在平面直角坐标系中作出一条刻画音乐旋律的曲线，和你的同伴交流以下问题：

(1) 看看画出的曲线是否一致？如果不一致，分析其中的原因。

(2) 任务2中在平面直角坐标系中刻画的音乐旋律是否可以视为函数图象？为什么？

任务4 把五线谱看作平面直角坐标系，为我们用数学的眼光欣赏音乐旋律提供了工具。自选一首歌（乐）曲，把其中一段旋律的五线谱表现在你建立的平面直角坐标系中，分析所画的曲线是否可以视为函数图象。

活动三 乐器的分析与制作（选做）

各种乐器的制作离不开数学知识，例如，笛子等管乐器的开孔位置、三角钢琴的外形轮廓线等都有数学依据作支撑，体现了数学与音乐的密切联系。

任务1 选择一种乐器，借助活动一中学过的音乐律制的知识，分析乐器结构中蕴含的数学知识。

任务2 尝试自制一个小乐器，和同学比较一下看谁制作的乐器音准更好。

活动过程

1. 组建合作团队

本次综合与实践活动需要团队协作。在班级中组成5~8人一组的研究小组，每位同学参加其中一个小组，每个小组确定一名负责人。

2. 方案构思

小组成员进行充分的讨论与交流，集思广益，形成解决上述任务的方案。

3. 方案实施

按照小组设计的方案进行任务分工，使每位成员都有明确的任务。根据规划的研究步骤实施，完成活动任务，形成研究报告。

4. 展示交流

制作向全班汇报的演示文稿，选出代表向全班同学展示本组的研究成果，分享实践过程中的活动经验、遇到的困难及其解决方法，反思活动中的不足。

注意：展示交流活动要邀请音乐老师参加点评。

活动评价

通过成果展示与交流，基于各组完成的研究报告，根据情况选择任务完成表、作品评分表、表现评分表、自我反思表等进行评价。与老师（包括音乐老师）和全班同学一起，通过质疑、辩论、评价，总结成果，分享体会，分析不足，开展自我评价、同学评价和教师评价，完成本次综合与实践活动。

第二十四章 数据的分析

数据是信息的载体，从数据中获取信息是统计研究的目的。利用统计图表直观描述数据，可以帮助我们大致了解数据的特征或规律，但要准确把握数据的特征，还需要用数值进行刻画。在社会生活中，人们经常用一个或几个数值刻画一组数据的特征。例如，用人均可支配收入刻画一个地区居民的收入水平，用近视率刻画全国青少年群体的近视情况，用老龄化率刻画一个国家或地区人口的老龄化情况等。这里的人均可支配收入、近视率、老龄化率都是对相关数据某种特征的刻画。

在本章中，我们将在用统计图表直观描述数据的基础上，研究用数值刻画数据特征的方法，学习平均数、中位数、众数、离差平方和、方差、四分位数等一些常用的刻画数据特征的统计量，并用它们解决一些实际问题。对于通过简单随机抽样获取的数据，还将根据样本与总体的关系，用样本的特征估计总体的特征。



24.1 数据的集中趋势

在生活、学习中，我们经常会说某班同学身高较高或成绩较好，这往往比较的是身高或成绩数据的“中心”所在位置，统计中把它称为数据的集中趋势，以前学过的平均数就是刻画数据集中趋势的常见统计量. 本节我们将进一步学习平均数，再学习两个刻画数据集中趋势的统计量——中位数和众数.

24.1.1 平均数

问题 1 甲、乙两组同学的跳绳成绩（单位：次/min）如下：

甲组 182 194 143 185 156

乙组 199 148 242 170 141

你认为哪组的跳绳成绩更好？

为了便于比较，需要分别把每组数据汇总到一个数值. 对于问题 1，可以用每组跳绳成绩的平均数进行比较.

甲组跳绳成绩的平均数为

$$\frac{182+194+143+185+156}{5}=172;$$

乙组跳绳成绩的平均数为

$$\frac{199+148+242+170+141}{5}=180.$$

由于乙组的跳绳成绩的平均数大于甲组的，所以乙组的跳绳成绩更好.

一般地，有 n 个数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，我们把

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$$

叫作这 n 个数据的 **平均数** (average)，记作 “ $\bar{x}$ ”. 平均数反映了一组数据取值的平均水平，是刻画数据集中趋势最常用的统计量.

是否可以用每组跳绳成绩的总数比较两组跳绳成绩？如果两组人数不同呢？

根据样本数据计算得到的平均数，叫作样本平均数；根据总体数据计算得到的平均数，叫作总体平均数.

问题 2 一家公司打算招聘一名英文翻译. 对甲、乙两名应试者进行了听、说、读、写的英语水平测试, 他们的各项成绩 (百分制) 如表 24.1-1 所示.

表 24.1-1

应试者	听	说	读	写
甲	85	78	85	73
乙	73	80	82	83

(1) 如果这家公司想招一名综合能力较强的英文翻译, 计算两名应试者的平均成绩. 从他们的成绩看, 应该录取谁?

(2) 如果这家公司想招一名笔译能力较强的英文翻译, 听、说、读、写成绩按照 2 : 1 : 3 : 4 的比确定, 计算两名应试者的平均成绩. 从他们的成绩看, 应该录取谁?

对于问题 (1), 根据平均数公式, 甲的平均成绩为

$$\frac{85+78+85+73}{4}=80.25,$$

乙的平均成绩为

$$\frac{73+80+82+83}{4}=79.5.$$

因为甲的平均成绩比乙的高, 所以应该录取甲.

对于问题 (2), 听、说、读、写成绩按照 2 : 1 : 3 : 4 的比确定, 这说明各项成绩的“重要程度”有所不同, 读、写的成绩比听、说的成绩更加“重要”. 因此, 甲的平均成绩为

$$\frac{85 \times 2 + 78 \times 1 + 85 \times 3 + 73 \times 4}{2+1+3+4}=79.5,$$

乙的平均成绩为

$$\frac{73 \times 2 + 80 \times 1 + 82 \times 3 + 83 \times 4}{2+1+3+4}=80.4.$$

因为乙的平均成绩比甲的高, 所以应该录取乙.

上述问题 (1) 是利用平均数的公式计算平均成绩, 其中每个数据被认为同等重要. 而问题 (2) 是根据实际需要不同的数据赋予与其重要程度相应的权重, 其中的 2, 1, 3, 4 分别称为听、说、读、写四项成绩的**权**, 相应的

平均数 79.5, 80.4 分别称为甲和乙的听、说、读、写四项成绩的**加权平均数** (weighted average).

一般地, 若 n 个数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的权分别为 $w_1, w_2, \dots, w_n$, 则

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

叫作这 n 个数的加权平均数.

权原指秤锤, 用于称物体, 这里有表示数据重要程度的意思.

思考

如果这家公司想招一名口语能力较强的英文翻译, 听、说、读、写成绩按照 3:3:2:2 的比确定, 那么甲、乙两人谁将被录取? 与上述问题中的 (1)(2) 比较, 你能体会到权的作用吗?

例 1 一次演讲比赛中, 评委将从演讲内容、语言表达、形象风度三个方面为选手打分. 各项成绩均按百分制计, 然后再按演讲内容占 50%、语言表达占 40%、形象风度占 10%, 计算选手的综合成绩. 进入决赛的前两名选手的单项成绩如表 24.1-2 所示, 请确定两人的名次.

表 24.1-2

选手	演讲内容	语言表达	形象风度
A	85	95	95
B	95	85	95

分析: 这个问题可以看成求两名选手三项成绩的加权平均数, 50%, 40%, 10% 表示演讲内容、语言表达、形象风度三项成绩在总成绩中的重要程度, 是三项成绩的权.

解: 选手 A 的综合成绩是

$$\frac{85 \times 50\% + 95 \times 40\% + 95 \times 10\%}{50\% + 40\% + 10\%} = 90,$$

选手 B 的综合成绩是

$$\frac{95 \times 50\% + 85 \times 40\% + 95 \times 10\%}{50\% + 40\% + 10\%} = 91.$$

由上可知, 选手 B 获得第一名, 选手 A 获得第二名.

例 1 中两名选手的单项成绩都是两个 95 分与一个 85 分, 为什么他们的综合成绩不同呢? 你能说一说权是如何影响加权平均数大小的吗?

 练习

1. 某公司欲招聘一名公关人员. 对甲、乙两位应试者进行了面试和笔试, 他们的成绩(百分制)如下表所示.

应试者	面试	笔试
甲	86	90
乙	92	83

- (1) 如果公司认为面试和笔试成绩同等重要, 从他们的成绩看, 谁将被录取?
- (2) 如果公司认为, 作为公关人员面试成绩应该比笔试成绩更重要, 并分别赋予它们 6 和 4 的权, 计算甲、乙两人各自的平均成绩, 谁将被录取?
2. 某中学规定学生的学期体育成绩满分为 100, 其中早锻炼及体育课外活动占 20%, 期中考试成绩占 30%, 期末考试成绩占 50%. 刘伟的三项成绩(百分制)依次是 95, 90, 85, 他这学期的体育成绩是多少?

例 2 某天访问 A, B 两个新闻类网站的用户数分别为 3×10^7 和 1×10^7 , 表 24.1-3 是用户在每个网站的停留时间和关于军事话题调查的统计结果.

表 24.1-3

网站	停留时间的平均数/h	对军事话题感兴趣的百分比/%
A	0.5	24
B	0.7	32

这天两个网站所有用户停留时间的平均数和对军事话题感兴趣的百分比分别是多少?

分析: 由于访问两个网站的用户数不同, 两个网站所有用户停留时间的平均数不能是两个网站各自用户平均停留时间的平均数 $\frac{0.5+0.7}{2}$, 还应考虑访问网站用户数的影响. 两个网站所有用户对军事话题感兴趣的百分比的计算也类似.

解：(1) 根据平均数和总数的关系，可以计算出两个网站所有用户停留时间的平均数为

$$\frac{0.5 \times 3 \times 10^7 + 0.7 \times 1 \times 10^7}{3 \times 10^7 + 1 \times 10^7} = 0.5 \times \frac{3}{4} + 0.7 \times \frac{1}{4} = 0.55.$$

(2) 两个网站所有用户对军事话题感兴趣的百分比为

$$\frac{24\% \times 3 \times 10^7 + 32\% \times 1 \times 10^7}{3 \times 10^7 + 1 \times 10^7} = 24\% \times \frac{3}{4} + 32\% \times \frac{1}{4} = 26\%.$$

0.55 是 0.5 和 0.7 分别以 3×10^7 和 1×10^7 为权的加权平均数，或分别以 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{1}{4}$ 为权的加权平均数.

可以发现，计算分组（两组或更多组）数据的平均数或百分数，只需知道两类信息：一是每组数据的平均数或百分数，二是每组数据的个数（频数），或每组数据个数所占的比值（频率）. 根据这两类信息，以频数或频率为权，通过计算加权平均数就可以得到结果.

上述计算分组数据的平均数或百分数的方法在实际中有着重要应用. 例如，要计算全国的居民人均可支配收入，可先按省份各自计算其人均可支配收入和人数，再利用加权平均数进行计算. 这样不仅减少了把各省份所有调查的数据集中在一起来的工作，而且分散了计算量. 像这样先按数据分组分别计算，再通过一定算法由各组结果计算出最后结果的方法属于分布式计算. 在大数据时代，数据规模非常巨大，在应用中往往对计算的时效性又有很高要求，利用分布式计算不仅可以节约整体计算时间，提高计算效率，还可以减少大量数据传输和存储带来的时间、经济成本.

探究

为了解 5 路公共汽车的运营情况，公交部门统计了某天 5 路公共汽车每个运行班次的载客量，得到表 24.1-4.

表 24.1-4

载客量 x /人	班次（频数）	载客量 x /人	班次（频数）
$1 \leq x < 21$	3	$61 \leq x < 81$	22
$21 \leq x < 41$	5	$81 \leq x < 101$	17
$41 \leq x < 61$	20	$101 \leq x < 121$	15

这天 5 路公共汽车平均每班的载客量是多少（结果取整数）？

从表 24.1-4 中, 我们无法知道每个班次确切的载客量. 为了计算 5 路公共汽车平均每班的载客量, 可以用各组的组中值 (这个小组两个端点的数的平均数) 代表各组的实际数据, 把各组的频数看作相应组中值的权, 通过计算加权平均数得到平均每班载客量的近似值.

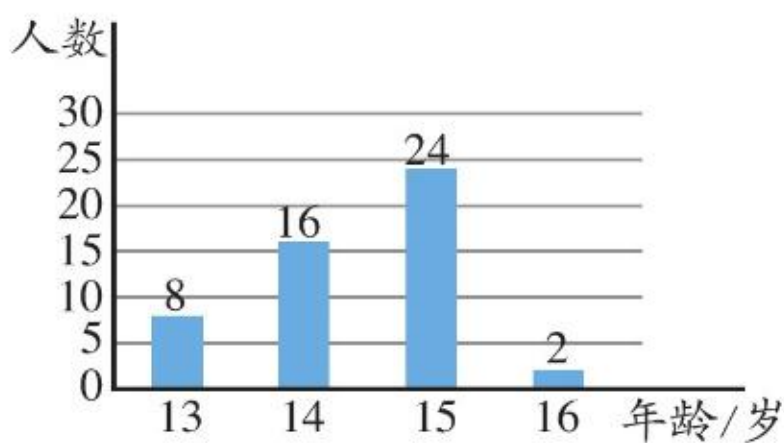
经计算, 得到各组的组中值分别为 11, 31, 51, 71, 91, 111, 用它们代表各组每个班次的载客量, 各组的班次 (频数) 分别是这些组中值的权. 因此, 这天 5 路公共汽车平均每班的载客量约为

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{11 \times 3 + 31 \times 5 + 51 \times 20 + 71 \times 22 + 91 \times 17 + 111 \times 15}{3 + 5 + 20 + 22 + 17 + 15} \\ &\approx 73 \text{ (人)}.\end{aligned}$$

一般的计算器都有统计功能, 利用统计功能可以求平均数. 使用计算器的统计功能求平均数时, 不同品牌计算器的操作步骤有所不同, 操作时需要参阅计算器的使用说明书. 通常先按某一功能键, 使计算器进入统计状态; 然后依次输入数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 以及它们的权 $w_1, w_2, \dots, w_n$; 最后按求平均数的功能键, 计算器便会求出 $\frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$ 的值.

练习

1. 某跳水队为了解运动员的年龄情况, 作了一次年龄调查, 结果如图所示. 求这个跳水队运动员的平均年龄 (结果取整数).



(第 1 题)

2. 某超市有 5 家分店, 其中一天的营业情况统计结果如下表所示.

分店	结账人次	每人次平均消费金额/元	非现金结账百分比/%
A	4 000	46	70
B	2 000	32	76
C	3 000	68	73
D	7 000	95	85
E	4 000	80	82

这家超市的每人次平均消费金额和非现金结账百分比分别是多少?

3. 对一个班级学生上学路上所需的时间进行了调查, 统计结果如下表所示.

所需时间 x/min	人数	百分比/%
$1 \leq x < 11$	18	36
$11 \leq x < 21$		46
$21 \leq x < 31$	7	
$31 \leq x < 41$	2	4

- (1) 将统计表补充完整;
(2) 这个班级学生上学路上平均所需时间为多少 (结果取整数)?

对于通过简单随机抽样获取的数据, 可以用样本的平均数估计总体的平均数.

例 3 从校医务室的体检数据中, 随机抽查了 20 名八年级学生, 他们的身高 (单位: cm) 如下:

162 152 166 185 167 175 169 163 168 184
177 162 157 154 171 169 171 169 175 164

估计这所学校八年级学生的平均身高.

分析: 随机抽出的 20 名八年级学生组成一个样本. 可以利用样本的平均身高估计这所学校八年级学生的平均身高.

解: 20 名学生的身高的平均数为

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{162+152+\cdots+164}{20} \\ &= 168.\end{aligned}$$

可以估计这所学校八年级学生的平均身高大约为 168 cm.

思考

这所学校八年级学生的平均身高是否一定为 168 cm? 你认为怎样可以提高估计的精确性?

例 4 为测量一批节能灯的使用寿命, 从中随机抽查了 50 盏节能灯, 它们的使用寿命如表 24.1-5 所示.

表 24.1-5

使用寿命 x/h	灯泡数/盏
$7\ 000 \leq x < 8\ 000$	4
$8\ 000 \leq x < 9\ 000$	9
$9\ 000 \leq x < 10\ 000$	12
$10\ 000 \leq x < 11\ 000$	18
$11\ 000 \leq x < 12\ 000$	7

这批节能灯的平均使用寿命是多少?

分析: 随机抽查的 50 盏节能灯组成一个样本. 可以先通过组中值计算出样本的平均使用寿命, 再利用样本的平均使用寿命估计这批节能灯的平均使用寿命.

用全面调查的方法考察这批节能灯的平均使用寿命合适吗?

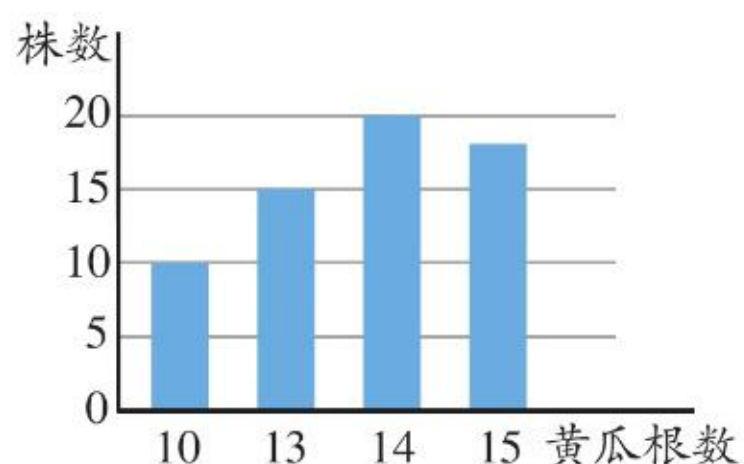
解: 根据表 24.1-5, 可以得出各组的组中值, 于是样本使用寿命的平均数为

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{7\ 500 \times 4 + 8\ 500 \times 9 + 9\ 500 \times 12 + 10\ 500 \times 18 + 11\ 500 \times 7}{50} \\ &= 9\ 800.\end{aligned}$$

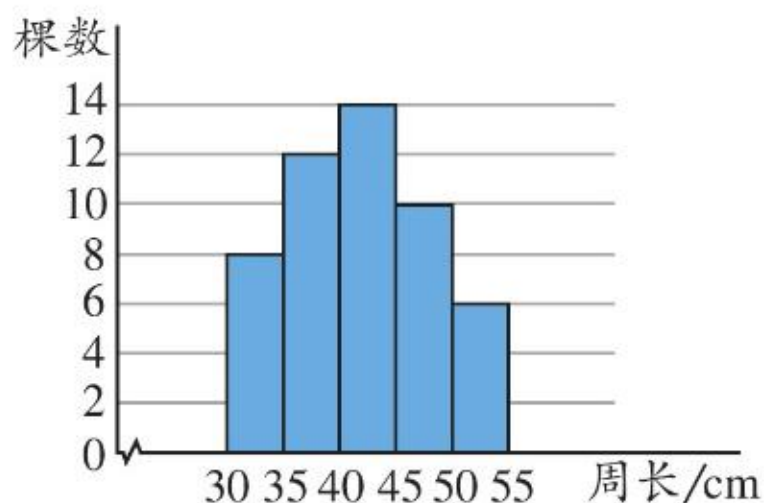
可以估计这批节能灯的平均使用寿命大约是 9 800 h.

练习

- 种菜能手李大叔种植了一批新品种黄瓜. 为了解这种黄瓜的生长情况, 他随机抽查了部分黄瓜藤上结出的黄瓜根数, 得到如图所示的条形图. 估计这批新品种黄瓜平均每株结多少根黄瓜 (结果取整数).



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 为了绿化环境, 某街道种植一批槐树, 五年后一些树干的周长情况如图所示. 估计这批槐树树干的平均周长 (结果取整数).
3. 学校为了解学生课外阅读的情况, 随机调查了 50 名学生一星期课外阅读的时间, 用了两个不同的表进行统计.

表 1

课外阅读时间 x/h	人数
$0 \leq x < 2$	2
$2 \leq x < 4$	6
$4 \leq x < 6$	23
$6 \leq x < 8$	11
$8 \leq x < 10$	5
$10 \leq x < 12$	3

表 2

课外阅读时间 x/h	人数
$0 \leq x < 4$	8
$4 \leq x < 8$	34
$8 \leq x < 12$	8

- (1) 根据表 1 和表 2 分别估计这所学校所有学生的平均课外阅读时间.
- (2) 用这两个表估计的结果相同吗? 如果不同, 用哪个表估计更合适? 为什么?

24.1.2 中位数和众数

问题 3 在第 149 页“问题 1”中, 计算得到甲和乙两组跳绳成绩的平均数分别为 172 次/min 和 180 次/min. 张华个人的跳绳成绩为 175 次/min, 她认为自己的成绩在甲组中属于中上水平, 在乙组中属于中下水平. 你认可张华的说法吗?

张华的跳绳成绩要处于一个组的中上 (或中下) 水平, 意味着她的成绩超过 (或低于) 这个组至少一半人数的成绩, 即超过 (或低于) 这个组中成绩排名居中的人的成绩.

按从小到大的顺序分别排列两组跳绳成绩, 甲组为

143 156 182 185 194

处在中间位置的数是 182, 它的左侧和右侧各有 2 个数. 乙组为

141 148 170 199 242

处在中间位置的数是 170, 它的左侧和右侧各有 2 个数.

张华的个人跳绳成绩 175 小于甲组中间位置的数 182, 而大于乙组中间位

置的数 170, 因此她的成绩在甲组中处于中下水平, 在乙组中处于中上水平, 这与她自己作出的判断正好相反.

上述中间位置的数 182 和 170, 分别是甲组数据和乙组数据集中趋势的一种刻画. 一般地, 一组数据按从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, 处于中间位置的数叫作这组数据的 **中位数** (median). 当数据的个数为奇数时, 处于中间位置的数就是中位数; 当数据的个数为偶数时, 居中的数据有两个, 取这两个数据的平均数为这组数据的中位数. 一组数据按大小排序后, 位于中位数左、右两侧的数据个数相同, 因此中位数反映了一组数据取值的中间水平.

思考

为什么甲组同学跳绳成绩的平均数比乙组的小, 而中位数反而大呢?

例 5 在一次男子马拉松长跑比赛中, 随机抽取 12 名选手所用的时间 (单位: min) 如下:

136 140 129 180 124 154 146 145 158 175 165 148

(1) 这组样本数据的中位数是多少?

(2) 一名选手所用的时间是 142 min, 推测他的成绩是否超过这次比赛中一半以上选手的成绩?

解: (1) 先将样本数据按照从小到大的顺序排列:

124 129 136 140 145 146 148 154 158 165 175 180

这组数据的中位数为处于居中两个数据 146, 148 的平均数, 即中位数为

$$\frac{146+148}{2}=147.$$

因此样本数据的中位数是 147.

(2) 根据 (1) 中得到的样本数据的中位数, 可以估计, 在这次马拉松比赛中, 大约有一半选手的所用时间小于 147 min, 有一半选手的所用时间大于 147 min. 这名选手的所用时间是 142 min, 小于中位数, 可以推测他的成绩比一半以上选手的成绩好.

问题 4 班级春游有三个备选地点, 经全班一人一票投票, 每个地点的得票数如表 24.1-6 所示.

表 24.1-6

地点	北京故宫	颐和园	香山公园
票数	10	26	4

你认为班级的春游地点应该选择哪里？

全班一人一票投票，相当于对全班同学作了一次全面调查，收集到的是每位同学的投票结果（北京故宫、颐和园或香山公园），在统计中这也属于数据。与前面见到的数据都是数值不同，这里的数据无法进行计算或排序，因此无法通过求它们的平均数或中位数去刻画班级的集体意见。对于这种情况，一般我们会采取少数服从多数的原则，把得票数最多的地点作为班级的集体意见。由表 24.1-6 可知，颐和园得票数最多，可以把颐和园作为全班同学意见的代表。

一组数据中出现次数最多的数据叫作这组数据的**众数**（mode）。例如，在问题 4 中，颐和园就是全班同学意见的众数。如果一组数据中有两个或两个以上的数据出现的次数并列最多，那么把这几个数据都作为这组数据的众数；如果一组数据中没有出现相同的数据，那么就认为这组数据没有众数。众数也是刻画数据集中趋势的一种统计量，当一组数据有较多的重复数据时，众数往往能较好地反映其集中趋势。

例 6 一家鞋店在一段时间内销售某种女鞋 30 双，各种尺码鞋的销售量如表 24.1-7 所示。

表 24.1-7

尺码/cm	22	22.5	23	23.5	24	24.5	25
销售量/双	1	2	5	11	7	3	1

你能根据表中的数据为这家鞋店提供进货建议吗？

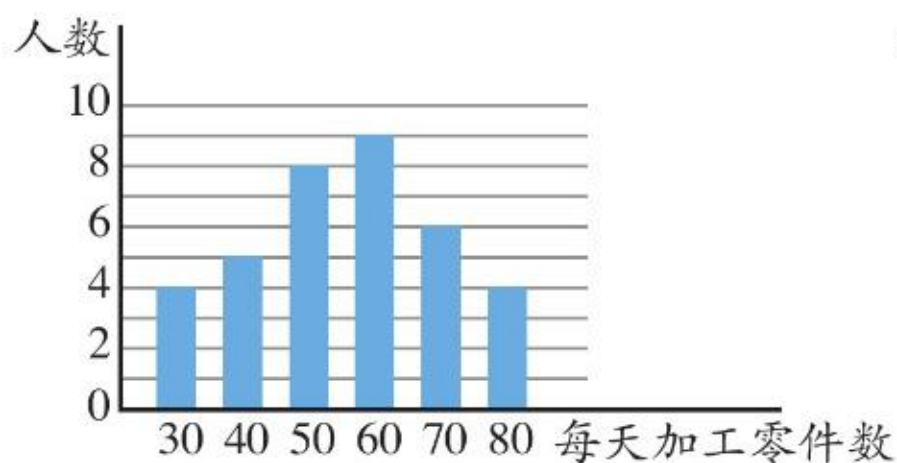
分析：一般来讲，鞋店比较关心哪种尺码的鞋销售量最大，也就是关心卖出的鞋的尺码组成的一组数据的众数。一段时间内卖出的 30 双女鞋的尺码组成一个样本数据，通过分析样本数据可以找出样本数据的众数，进而可以估计这家鞋店销售哪种尺码的鞋最多。

分析表 24.1-7 中的数据，你还能鞋店进货提出哪些建议？

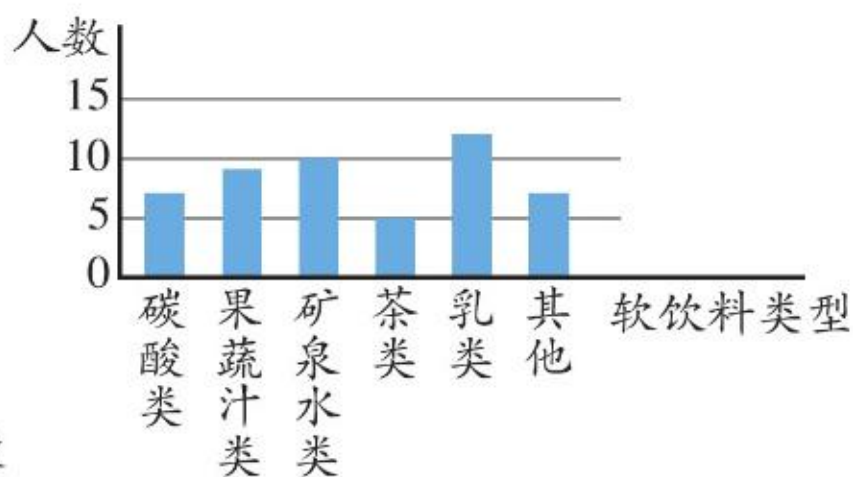
解：由表 24.1-7 可以看出，在不同的尺码中，尺码为 23.5 cm 的鞋销售量最大，即众数为 23.5，因此可以建议鞋店多进 23.5 cm 的鞋。

练习

1. 某车间工人每天加工零件数的情况如图所示, 求这些工人每天加工零件数的中位数.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 为研究不同类型软饮料的市场销售情况, 市场调查员在一家超市随机观察并记录了 50 名顾客购买的软饮料类型, 如图所示. 顾客购买的软饮料类型的众数是什么?

虽然平均数、中位数和众数都可以用于刻画一组数据的集中趋势, 但它们刻画的角度并不相同. 在实际应用中, 需要分析具体情况, 选择适当的统计量刻画数据的集中趋势.

例 7 表 24.1-8 是某公司员工月收入的资料.

表 24.1-8

月收入/元	45 000	18 000	10 000	5 000	3 600	3 000
人数	1	1	1	7	6	4

- (1) 分别计算这家公司员工月收入的平均数和中位数.
 (2) 若要反映这家公司员工月收入水平, 你认为用平均数还是中位数? 为什么?

解: (1) 这家公司员工月收入的平均数为

$$\bar{x} = \frac{45\,000 + 18\,000 + 10\,000 + 5\,000 \times 7 + 3\,600 \times 6 + 3\,000 \times 4}{1 + 1 + 1 + 7 + 6 + 4} = 7\,080.$$

将公司 20 名员工的月收入按从小到大排列, 可以得到第 10 个和第 11 个数据分别为 3 600 和 5 000, 可得中位数为

$$\frac{3\,600+5\,000}{2}=4\,300.$$

为什么平均数比中位数高这么多？

(2) 在 20 名员工中，仅有 3 名员工的月收入在 7 080 元以上，而另外 17 名员工的月收入都在 7 080 元以下。因此，用月收入的平均数代表所有员工的月收入水平不太合适。而中位数 4 300 说明一半员工的月收入高于 4 300 元，另一半员工的月收入低于 4 300 元。相对平均数而言，中位数更能代表这家公司所有员工的月收入水平。

思考

求出这家公司员工月收入的众数，用众数刻画这家公司员工月收入水平是否合适？为什么？

例 8 某商场服装部为了调动营业员的积极性，决定实行目标管理，根据目标完成的情况对营业员进行适当的奖励。为了确定一个适当的月销售目标，商场服装部统计了每位营业员在某月的销售额（单位：万元），数据如下：

17 18 16 13 24 15 28 26 18 19
22 17 16 19 32 30 16 14 15 26
15 32 23 17 15 15 28 28 16 19

(1) 月销售额在哪个值的人数最多？中间位置的月销售额是多少？平均月销售额是多少？

(2) 如果想确定一个较高的销售目标，你认为在 (1) 的三个销售额中选哪一个作为销售目标合适？请说明理由。

(3) 如果想让一半左右的营业员都能达到销售目标，你认为月销售额定为多少合适？请说明理由。

确定一个适当的月销售目标是一个关键问题。如果目标定得太高，多数营业员完不成任务，会使营业员失去信心；如果目标定得太低，不能发挥营业员的潜力。

分析：商场服装部统计的每位营业员在某月的销售额组成一个样本，通过分析样本数据的平均数、中位数、众数来估计总体的情况，从而解决问题。

解：整理上面的数据得到表 24.1-9 和图 24.1-1。

表 24.1-9

月销售额/万元	13	14	15	16	17	18	19	22	23	24	26	28	30	32
人数	1	1	5	4	3	2	3	1	1	1	2	3	1	2

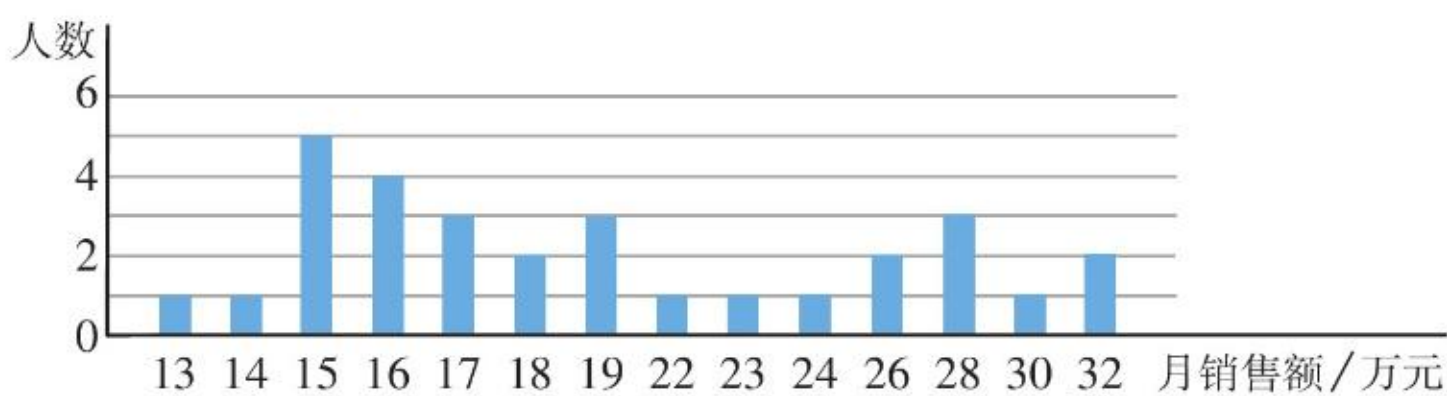


图 24.1-1

(1) 从表 24.1-9 或图 24.1-1 可以看出, 样本数据的众数是 15, 中位数是 18, 利用计算器求得这组数据的平均数约是 20. 可以推测, 这个服装部营业员的月销售额为 15 万元的人数最多, 中间位置的月销售额是 18 万元, 平均月销售额大约是 20 万元.

用表格整理数据和用图形表示数据, 有助于我们发现数据的特点或规律.

(2) 如果想确定一个较高的销售目标, 这个目标可以定为每月 20 万元 (平均数). 因为从样本数据看, 在平均数、中位数和众数中, 平均数最大. 可以估计, 月销售额定为每月 20 万元是一个较高目标, 大约会有 $\frac{1}{3}$ 的营业员获得奖励.

(3) 如果想让一半左右的营业员能够达到销售目标, 月销售额可以定为每月 18 万元 (中位数). 因为从样本情况看, 月销售额在 18 万元以上 (含 18 万元) 的有 16 人, 占总人数的一半左右. 可以估计, 如果月销售额定为 18 万元, 将有一半左右的营业员获得奖励.

归纳

平均数、中位数和众数都可以刻画一组数据的集中趋势, 但它们各有特点.

平均数是一组数据的平均值, 计算时要用到所有的数据, 它能够充分利用数据提供的信息, 在现实生活中较为常用. 但平均数受极端值 (一组数据中与其他数据差异很大的数据) 的影响较大, 对于存在极端值的数据, 一般平均数的代表性较差.

你知道在体操比赛评分时, 为什么要去掉一个最高分和一个最低分吗?

中位数是一组数据按大小排序后处于中间位置的数, 计算简单, 不易受极端值影响. 但中位数不能充分利用数据提供的信息.

众数是一组数据中出现次数最多的数据，不易受极端值影响，但当各个数据的重复次数差别不大时，众数往往不具有代表性。

练习

1. 王芳在记录第 149 页“问题 1”中乙组同学的跳绳成绩时，把 242 错记成了 224，此时乙组跳绳成绩的平均数和中位数是否都受影响？请你解释其中的原因。

2. 有两组学生的体重数据（单位：kg）：

第 1 组 38 40 44 50 52 52 74

第 2 组 38 40 44 50 52 52 60

(1) 分别求这两组数据的平均数、中位数、众数；

(2) 比较这两组数据的平均数、中位数、众数，结合数据谈一谈它们刻画数据集中趋势的特点。

习题 24.1

复习巩固

1. 某公司有 15 名员工，他们所在部门及相应每人所创年利润如下表所示。

部门	人数	年利润/万元
A	1	100
B	3	80
C	7	50
D	4	30

这个公司平均每人所创年利润是多少？

2. 某校八年级（1）班男生投掷实心球成绩如下表所示。

成绩 x/m	人数	成绩 x/m	人数
$6 \leq x < 7$	2	$9 \leq x < 10$	7
$7 \leq x < 8$	4	$10 \leq x < 11$	3
$8 \leq x < 9$	8	$11 \leq x < 12$	1

这个班男生投掷实心球的平均成绩是多少？

3. 为了检查一批零件的质量，从中随机抽取 10 件，测得它们的长度（单位：mm）如下：

22.36 22.35 22.33 22.35 22.37
22.34 22.38 22.36 22.32 22.35

根据以上数据，估计这批零件的平均长度.

4. 在一次中学生田径运动会上，参加男子跳高的 15 名运动员的成绩如下表所示.

成绩/m	1.45	1.50	1.60	1.65	1.70	1.75
人数	1	4	5	2	2	1

分别求这些运动员成绩的平均数（结果保留小数点后两位）、中位数、众数.

综合运用

5. 在一次青年歌手演唱比赛中，5 位评委给两位歌手的打分分别为

甲 9.5 9.5 9.4 9.6 9.5
乙 9.6 9.6 9.6 9.6 9.0

- 求两位歌手的平均得分.
 - 如果去掉一个最高分和一个最低分，求两位歌手的平均得分.
 - 你认为哪种计算平均得分的方法更合理？为什么？
6. 某县三个镇的人数及人均耕地面积如下表所示.

镇	人数/万人	人均耕地面积/hm ²
A	15	0.15
B	7	0.21
C	10	0.18

求这三个镇的人均耕地面积（结果保留小数点后两位）.

7. 某学校各年级的人数及某天早操的出勤率如下表所示.

年级	人数	出勤率/%
七年级	400	98
八年级	350	96
九年级	380	95

求这所学校早操的出勤率（结果写成 $a\%$ 的形式，其中 a 取整数）.

8. 某商场招聘一名员工, 现有甲、乙、丙三人竞聘. 通过计算机、语言和商品知识三项测试, 他们各自的成绩 (百分制) 如下表所示.

应试者	计算机	语言	商品知识
甲	70	50	80
乙	90	75	45
丙	50	60	85

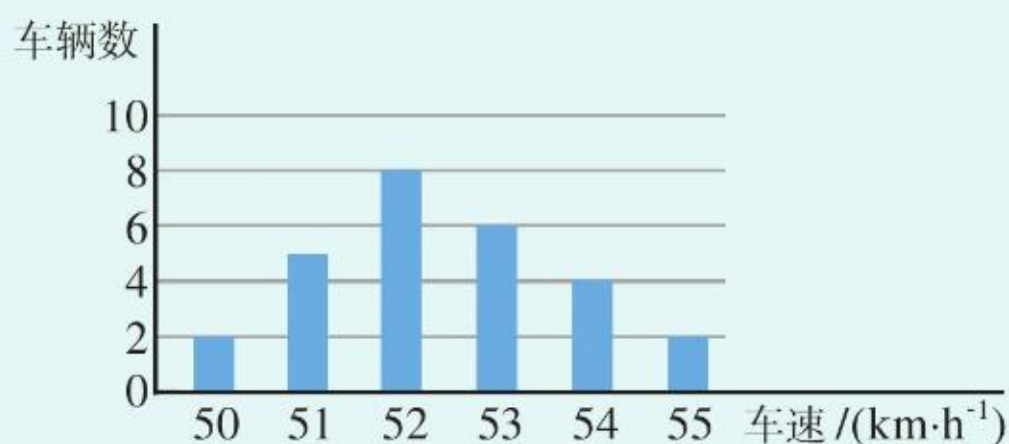
- (1) 若商场需要招聘负责将商品拆装上架的人员, 对计算机、语言和商品知识分别赋权 2, 3, 5, 计算三名应试者的平均成绩. 从成绩看, 应该录取谁?
- (2) 若商场需要招聘电脑收银员, 计算机、语言、商品知识成绩分别占 50%, 30%, 20%, 计算三名应试者的平均成绩. 从成绩看, 应该录取谁?
9. 某地某个月中午 12 时的气温 (单位: $^{\circ}\text{C}$) 如下:

22 31 25 13 18 23 13 28 30 22 20 20 27 17 28
21 14 14 22 12 18 21 29 15 16 14 31 24 26 29

- (1) 求这个月中午 12 时的平均气温 (结果取整数);
- (2) 请以 4 为组距对数据分组, 作出频数分布表, 根据频数分布表计算这个月中午 12 时的平均气温, 与 (1) 中的结果比较, 你有什么发现, 谈一谈你的看法.
10. 下表是某养鸡场的一批鸡出售时质量的统计数据.

质量/kg	1.3	1.6	1.9	2.1	2.3
频数	53	108	348	275	216

- 分别求这批鸡质量的平均数 (结果保留小数点后一位)、中位数和众数.
11. 下图是一个路口某个时段来往车辆的车速情况.

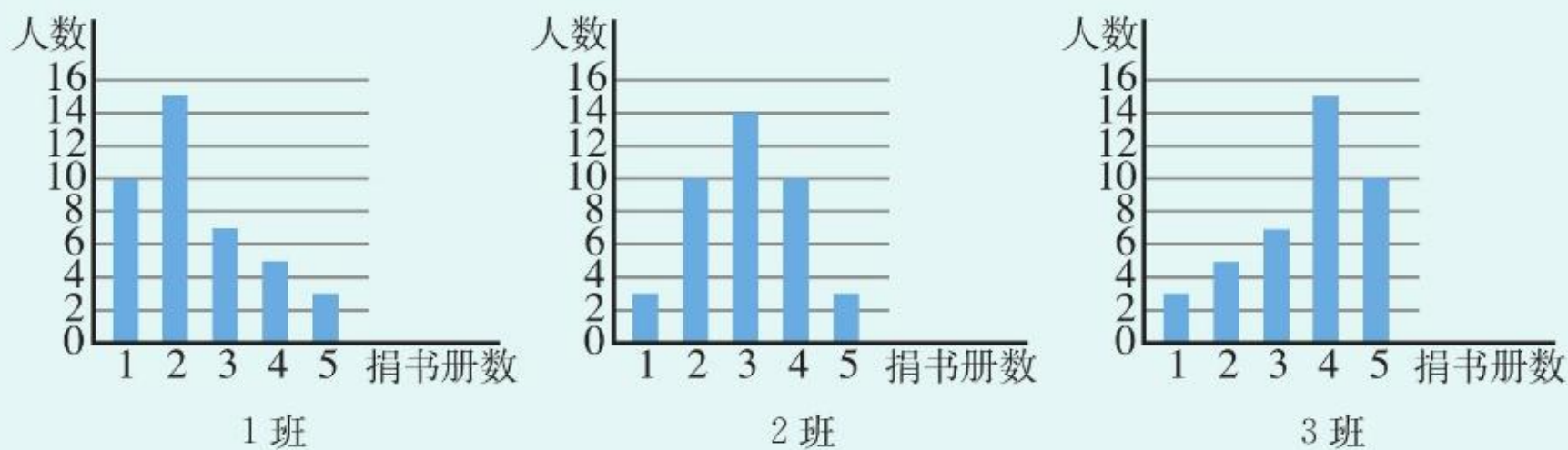


(第 11 题)

应用你所学的统计知识，写一份简短的报告，向交警描述这个时段路口来往车辆的车速情况。

拓展探索

12. 学校举办为儿童福利院捐书的活动，三个班的捐书情况如图所示。



(第12题)

1班捐书册数的平均数、中位数哪个大？2班和3班呢？请你解释其中的原因。

13. 调查你所在小组同学最近一周体育锻炼的时间，应用所学的统计知识分析数据，并对自己所在小组的体育锻炼情况作出评价。

信息技术应用

利用统计软件求统计量

统计中经常会涉及数据的计算。当数据量不大时，可以通过纸笔进行计算。当数据量很大时，用纸笔计算不仅工作量大、效率低，而且容易出错。为了从烦琐、机械的计算中解放出来，提高计算的效率和准确性，现在人们经常借助计算器或计算机等信息技术工具进行统计计算。下面以借助某软件计算第149页“问题1”中的平均数和第152页“例2”中的加权平均数为例（不同软件或软件的不同版本，具体操作可能不同），介绍用信息技术工具求统计量的值。

一、平均数

1. 将问题1中甲组的数据输入表格（如A2:A6）。
2. 点击一个空白单元格（如A8），用于放置计算结果。
3. 在工具列中点击指令栏图标“ f_x ”，在调出的指令栏中输入指令“平均数(A2:A6)”或“mean(A2:A6)”，回车键确认即可计算得到甲组同学跳绳数据

的平均数，如图 1 所示。注意：指令表达式中括号和冒号要在半角状态下输入。

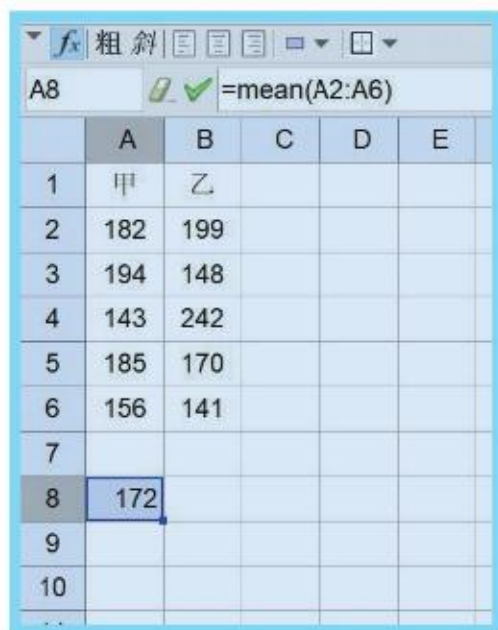
类似地，也可以得到乙组数据的平均数。

二、加权平均数

1. 将例 2 中的数据输入表格（如 A2:C3）。
2. 点击一个空白单元格（如 A5），用于放置计算结果。
3. 在工具列中点击指令栏图标 f_x ，在调出的指令栏中输入指令“平均数(A2:A3,C2:C3)”或“mean(A2:A3,C2:C3)”，回车键确认即可计算得到所有用户停留时间的加权平均数，如图 2 所示。

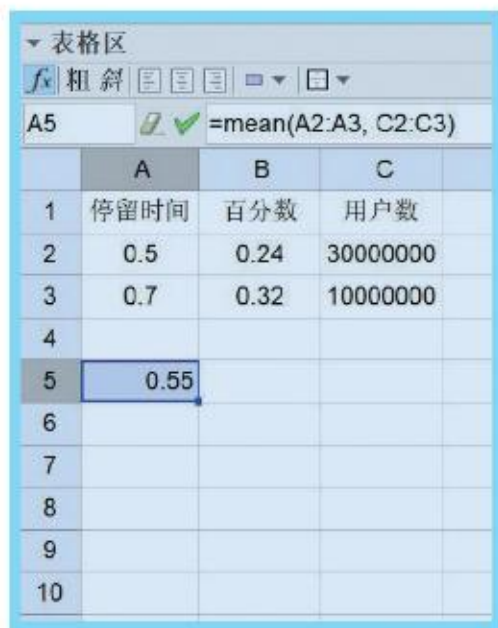
类似地，用指令“平均数(B2:B3,C2:C3)”或“mean(B2:B3,C2:C3)”，也可以得到所有用户对军事话题感兴趣的加权平均数。

在一些软件中，点击指令帮助图标②，可以打开数学函数列表，进而查看用于求各种统计量值的指令及其调用格式。本章学习的所有统计量，都可以在其中找到相应的计算指令。



	A	B	C	D	E
1	甲	乙			
2	182	199			
3	194	148			
4	143	242			
5	185	170			
6	156	141			
7					
8	172				
9					
10					

图 1



	A	B	C
1	停留时间	百分数	用户数
2	0.5	0.24	30000000
3	0.7	0.32	10000000
4			
5	0.55		
6			
7			
8			
9			
10			

图 2

24.2 数据的离散程度

在数据分析中，除了集中趋势，数据的波动情况也是人们经常关注的特征，统计中把它称为数据的离散程度. 本节我们将学习刻画一组数据离散程度的两个常见统计量——离差平方和、方差.

问题 某农业科学院专家为某地选择合适的甜玉米种子. 选择种子时，甜玉米的产量和产量的稳定性是专家所关心的问题. 为了解甲、乙两种甜玉米种子的相关情况，专家各用 10 块自然条件相同的试验田进行试验，得到各试验田每公顷的产量（单位：t）如表 24.2-1 所示.

表 24.2-1

甲	7.65	7.50	7.62	7.59	7.65	7.64	7.50	7.40	7.41	7.41
乙	7.55	7.56	7.53	7.44	7.49	7.52	7.58	7.46	7.53	7.49

根据这些数据估计，专家应该选择哪种甜玉米种子呢？

上面两组数据的平均数分别是

$$\bar{x}_{\text{甲}} = 7.537, \bar{x}_{\text{乙}} = 7.515.$$

说明在试验田中，甲、乙两种甜玉米的平均产量相差不多. 由此可以估计出这个地区种植这两种甜玉米，它们的平均产量相差不多.

由样本平均数估计
总体平均数.

为了直观地观察甲、乙两种甜玉米在各试验田产量的分布情况，我们把表 24.2-1 中的两组数据分别用图形进行描述，如图 24.2-1 和图 24.2-2 所示.

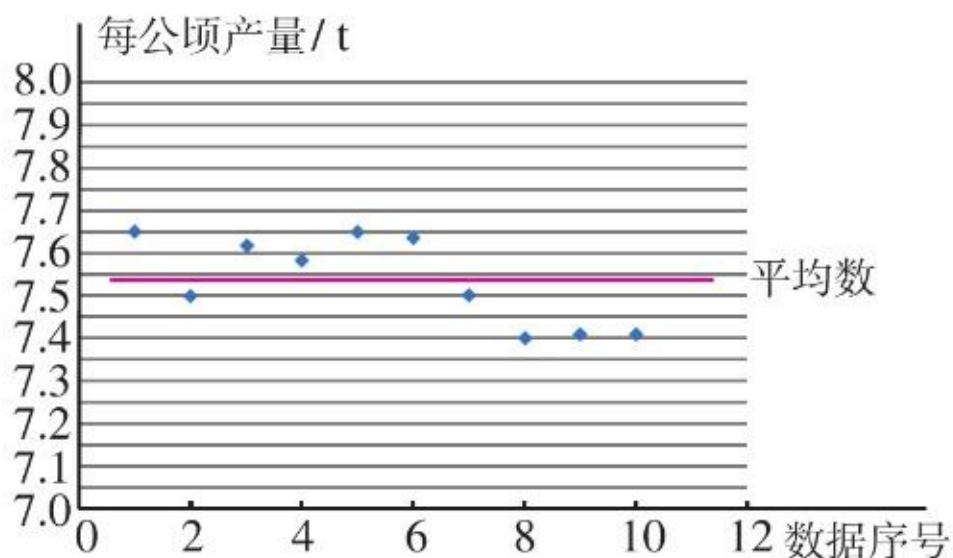


图 24.2-1 甲种甜玉米的产量

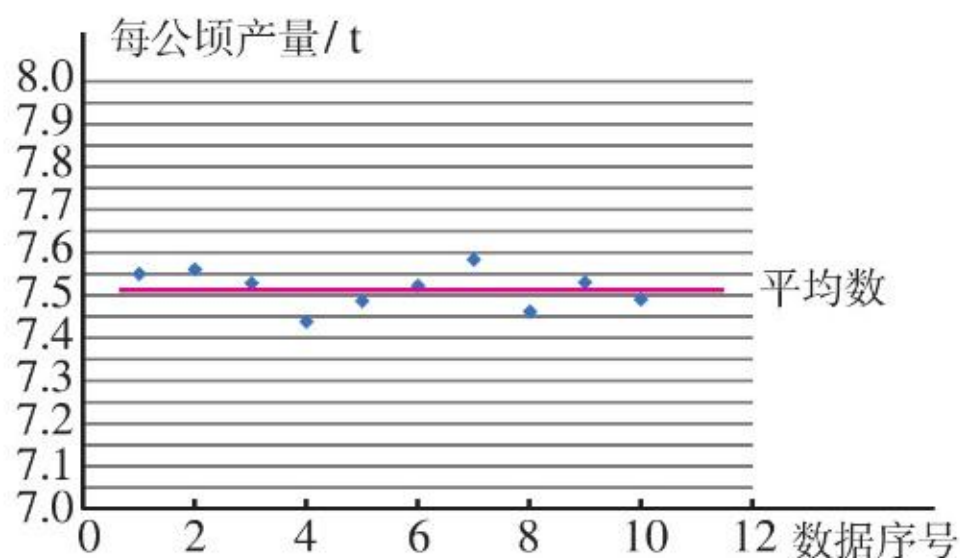


图 24.2-2 乙种甜玉米的产量

比较两幅图可以看出,甲种甜玉米在各试验田的产量波动较大,多个产量离平均产量较远;而乙种甜玉米在各试验田的产量波动较小,较集中地分布在平均产量附近.因此,从直观上判断乙种甜玉米的产量稳定性更好.如何用一个值刻画一组数据的波动程度或离散程度呢?

正如图 24.2-1 和图 24.2-2 所呈现的,当数据分布比较分散时,数据与平均数的差异相对较大;当数据分布比较集中时,数据与平均数的差异相对较小.反过来也成立.这样,为了全面反映一组数据的离散程度,可以通过数据与平均数的差异来刻画.

一般地,有 n 个数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 用 $\bar{x}$ 表示它们的平均数, 我们把 $x_i - \bar{x}$ ($i=1, 2, \dots, n$) 叫作 x_i 关于平均数 $\bar{x}$ 的**离差** (deviation).

思考

可以用平均离差刻画一组数据的离散程度吗?

用离差可以刻画每个数据与平均数的差异, 但由

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = x_1 + x_2 + \dots + x_n - n\bar{x} = 0$$

可知, 一组数据的离差和总是 0, 因此平均离差无法刻画一组数据与平均数的差异.

为了避免离差求和时正负抵消的问题, 统计中通常先对离差进行平方, 然后求和. 我们把

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2$$

叫作这 n 个数据关于平均数的**离差平方和** (sum of squares of deviations), 记作 “ d^2 ”. 把离差的平方的平均数

$$\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

叫作这组数据的**方差** (variance), 记作 “ s^2 ”. 方差反映了每个数据与平均数的平均差异程度, 能较好地反映出数据的离散程度, 是刻画数据离散程度最常用的统计量. 方差越大, 数据的离散程度越大; 方差越小, 数据的离散程度越小.

回到本节“问题”, 根据表 24.2-1, 可以得到

根据样本数据计算得到的方差, 叫作样本方差; 根据总体数据计算得到的方差, 叫作总体方差.

$$s_{\text{甲}}^2 = \frac{(7.65-7.537)^2 + (7.50-7.537)^2 + \cdots + (7.41-7.537)^2}{10} \approx 0.010,$$

$$s_{\text{乙}}^2 = \frac{(7.55-7.515)^2 + (7.56-7.515)^2 + \cdots + (7.49-7.515)^2}{10} \approx 0.002.$$

由 $s_{\text{甲}}^2 > s_{\text{乙}}^2$ ，可得乙种甜玉米产量的离散程度较小，即乙种甜玉米产量波动较小，稳定性较好.

由此可知，在试验田中，乙种甜玉米的产量比较稳定. 正如用样本的平均数估计总体的平均数一样，也可以用样本的方差来估计总体的方差. 因此可以推测，在这个地区种植乙种甜玉米的产量比种植甲种的稳定. 综合考虑甲、乙两个品种的平均产量和产量的稳定性，可以推测这个地区比较适合种植乙种甜玉米.

思考

用离差平方和是否可以刻画数据的离散程度？和方差比较，有什么不足？

离差平方和可以刻画一组数据的离散程度. 在比较两组数据的离散程度时，离差平方和只适用于数据个数相同的情况，而方差则不受这个限制.

例 1 甲、乙两名气手枪运动员进行射击训练，10 次射击成绩（单位：环）如表 24.2-2 所示.

表 24.2-2

甲	9	7	9	10	10	8	9	10	5	10
乙	9	10	7	8	10	9	9	8	7	9

哪名射击运动员的发挥更稳定？

解：两名运动员射击成绩的平均数分别为

$$\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{9+7+\cdots+10}{10} = 8.7,$$

$$\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{9+10+\cdots+9}{10} = 8.6.$$

两名运动员射击成绩的方差分别为

$$s_{\text{甲}}^2 = \frac{(9-8.7)^2 + (7-8.7)^2 + \cdots + (10-8.7)^2}{10} = 2.41,$$

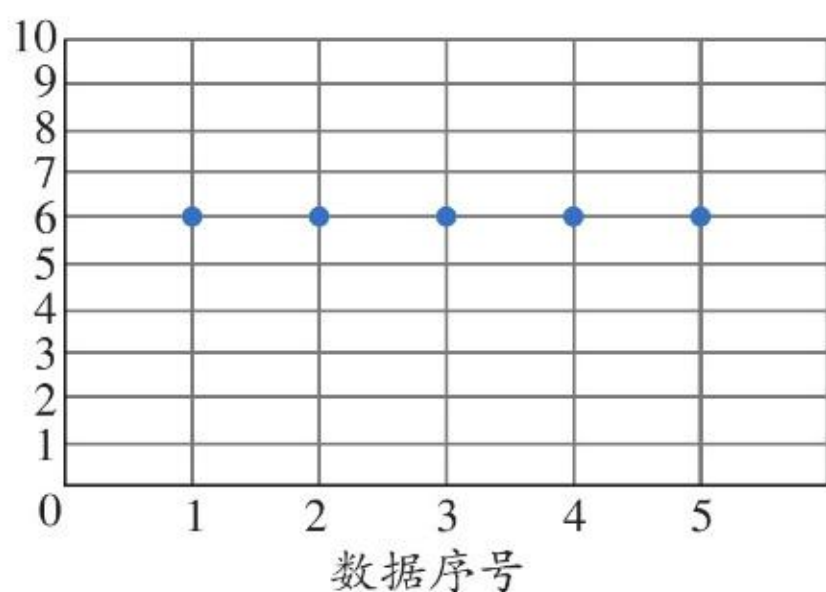
$$s_{\text{乙}}^2 = \frac{(9-8.6)^2 + (10-8.6)^2 + \cdots + (9-8.6)^2}{10} = 1.04.$$

由 $s_{\text{甲}}^2 > s_{\text{乙}}^2$ 可知，乙射击运动员的发挥更稳定.

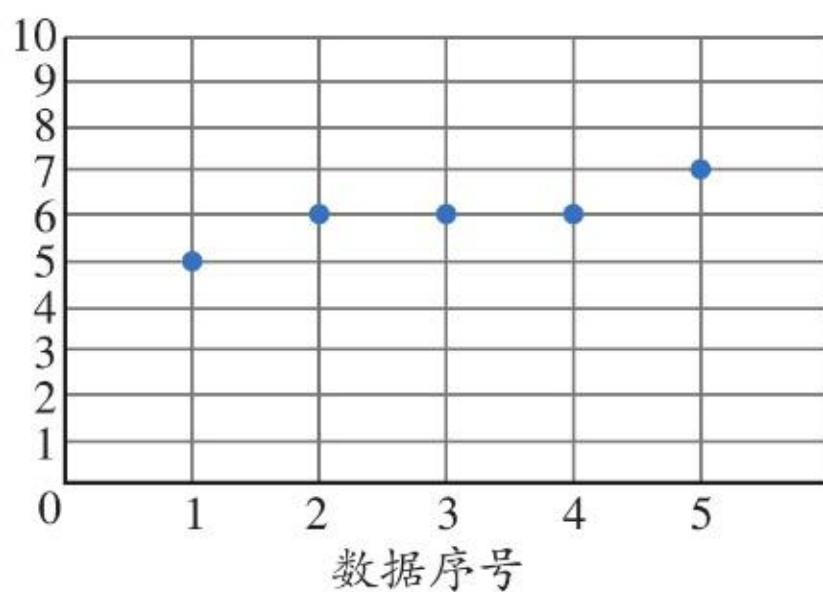
利用计算器的统计功能可以求方差. 使用计算器的统计功能求方差，操作时需要参阅计算器的使用说明书. 通常先按某一功能键，使计算器进入统计状态；然后依次输入数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ；最后按求方差的功能键，计算器便会求出方差 $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$ 的值.

练习

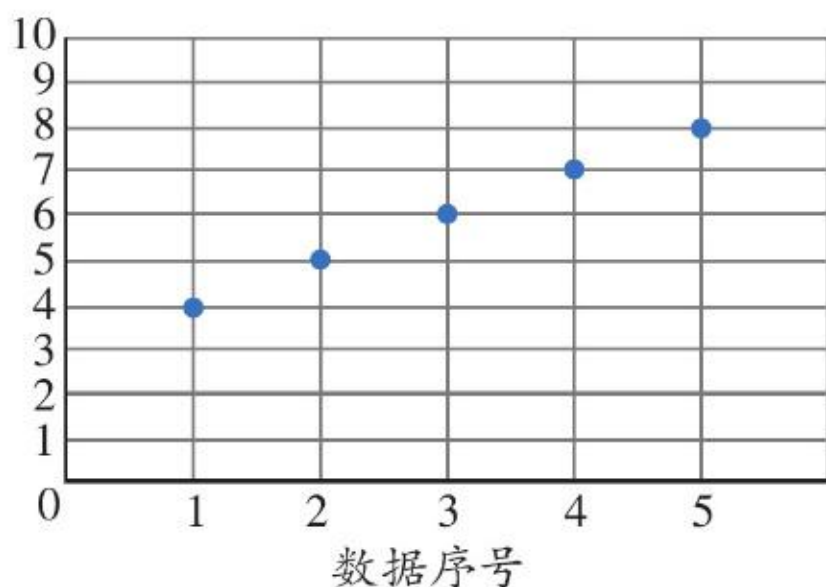
1. 如图，有 4 组数据，将这 4 组数据按离散程度从小到大排序. 先通过直观判断排序，再根据方差排序. 这两种排序的结果是否一致？



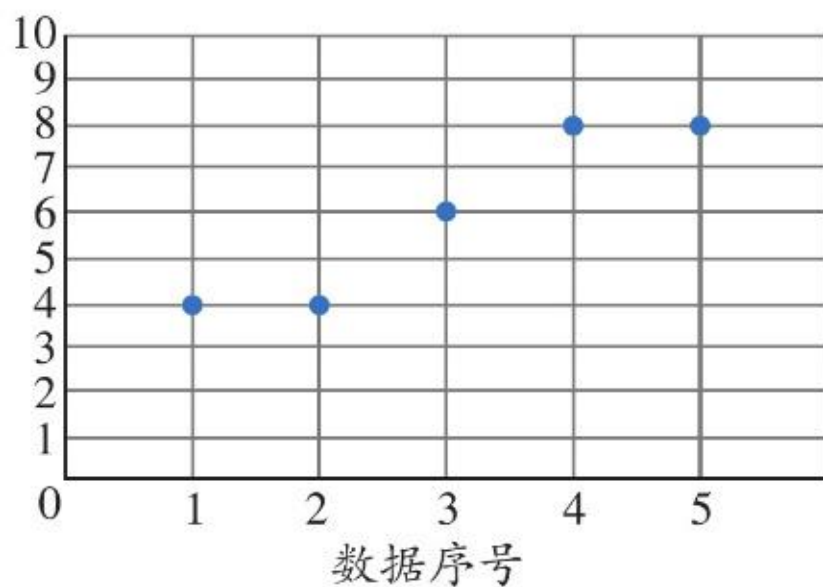
(1)



(2)



(3)



(4)

(第 1 题)

2. 根据方差比较第 149 页“问题 1”中两组跳绳成绩的离散程度.

例 2 自动灌装线灌装饮料时, 由于各种不可控的因素, 每瓶饮料的实际含量与标准含量会存在一些误差 (实际含量 - 标准含量). 甲、乙两条灌装线同时灌装标准含量为 500 mL 的饮料, 为了检验两条灌装线的灌装质量, 从每条灌装线上各随机抽取 10 瓶饮料进行测量, 结果 (单位: mL) 如表 24.2-3 所示.

表 24.2-3

甲	501	496	498	499	503	498	505	498	501	501
乙	496	493	504	495	500	506	504	505	498	499

(1) 如果有一瓶饮料含量的误差的绝对值超过 10 mL, 此条灌装线的灌装质量为不合格, 那么两条灌装线的灌装质量是否合格?

(2) 哪条灌装线的灌装质量更好?

分析: 在饮料含量的误差的绝对值符合要求前提下, 灌装饮料的实际含量与标准含量的差异越小, 说明灌装线的质量越好.

解: (1) 甲、乙灌装线饮料的实际含量与标准含量 500 mL 的误差如表 24.2-4 所示.

表 24.2-4

甲组误差/mL	1	-4	-2	-1	3	-2	5	-2	1	1
乙组误差/mL	-4	-7	4	-5	0	6	4	5	-2	-1

从表 24.2-4 中的数据可以看出, 甲、乙灌装线灌装的误差绝对值最大分别为 5 mL、7 mL, 两者都小于 10 mL, 因此两条灌装线灌装的质量都是合格的.

(2) 甲、乙灌装线饮料实际含量的平均数分别为

$$\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{501 + 496 + \cdots + 501}{10} = 500,$$

$$\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{496 + 493 + \cdots + 499}{10} = 500.$$

两条灌装线饮料实际含量的平均数都等于标准含量.

可以类比方差, 计算甲、乙灌装线饮料的实际含量与标准含量的平均差异程度, 分别为

$$\frac{(501-500)^2 + (496-500)^2 + \cdots + (501-500)^2}{10} = 6.6,$$

$$\frac{(496-500)^2 + (493-500)^2 + \cdots + (499-500)^2}{10} = 18.8.$$

可以发现，甲灌装线饮料实际含量与标准含量的平均差异更小.

根据样本估计总体，综合来看，甲灌装线的灌装质量更好.

例 3 甲、乙两地同一天的气温记录如表 24.2-5 所示.

表 24.2-5

时刻	0:00	2:00	4:00	6:00	8:00	10:00	12:00	14:00	16:00	18:00	20:00	22:00	24:00
甲/℃	11	9	10	12	16	21	23	24	21	18	16	14	13
乙/℃	13	11	12	14	15	17	19	21	20	18	17	16	15

两地的气温有什么差异?

解：为了直观地观察两地气温的特点，以时刻为横坐标，气温为纵坐标，把表 24.2-5 中的数据用折线图进行表示，得到图 24.2-3.

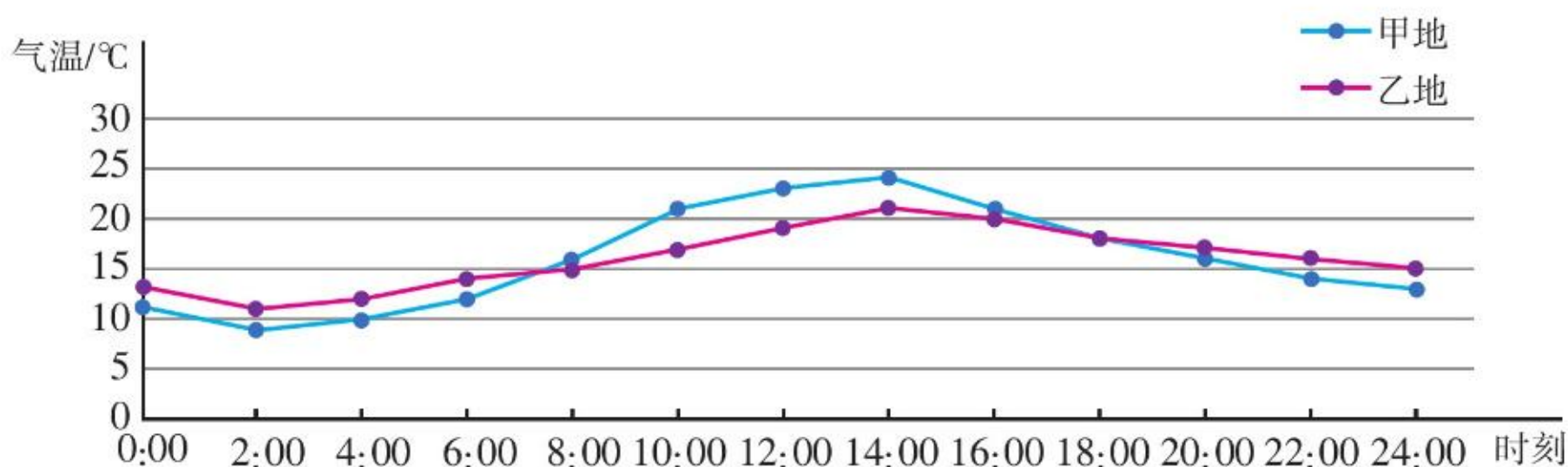


图 24.2-3

从图 24.2-3 可以看出，甲、乙两地气温在不同的时刻互有高低，但甲地的最高气温高于乙地，而最低气温低于乙地. 为进一步了解两地气温的差异，可以从数据的集中趋势和离散程度两个方面分别进行比较.

两地气温的平均数分别为

$$\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{11+9+\cdots+13}{13} = 16, \quad \bar{x}_{\text{乙}} = \frac{13+11+\cdots+15}{13} = 16.$$

将两地气温按从小到大排列，可得

甲地 9 10 11 12 13 14 16 16 18 21 21 23 24

乙地 11 12 13 14 15 15 16 17 17 18 19 20 21

可以发现两地气温的中位数都是 16，众数各有两个（甲地是 16 和 21，乙地是 15 和 17）且都出现两次，因为重复次数太少，所以不具有代表性. 因此，从数据的集中趋势看，两地的气温差异不明显.

两地气温的方差分别为

$$s_{\text{甲}}^2 = \frac{(11-16)^2 + (9-16)^2 + \cdots + (13-16)^2}{13} = \frac{306}{13} \approx 23.5,$$

$$s_{\text{乙}}^2 = \frac{(13-16)^2 + (11-16)^2 + \cdots + (15-16)^2}{13} = \frac{112}{13} \approx 8.6.$$

由 $s_{\text{甲}}^2 > s_{\text{乙}}^2$ 可知, 乙地气温的波动程度比甲地的小, 气温更稳定.

练习

1. 甲、乙两名运动员进行罚球线上投篮测试. 每人投篮 10 组, 每组投篮 10 次, 两名运动员投篮 10 组命中的次数如下表所示.

甲	8	6	9	6	8	10	7	7	10	9
乙	7	8	9	8	9	8	8	10	6	7

哪名运动员的投篮更稳定?

2. 甲、乙两台机床同时生产一种零件. 在 10 天中, 两台机床每天出次品的数量 (单位: 件) 如下表所示.

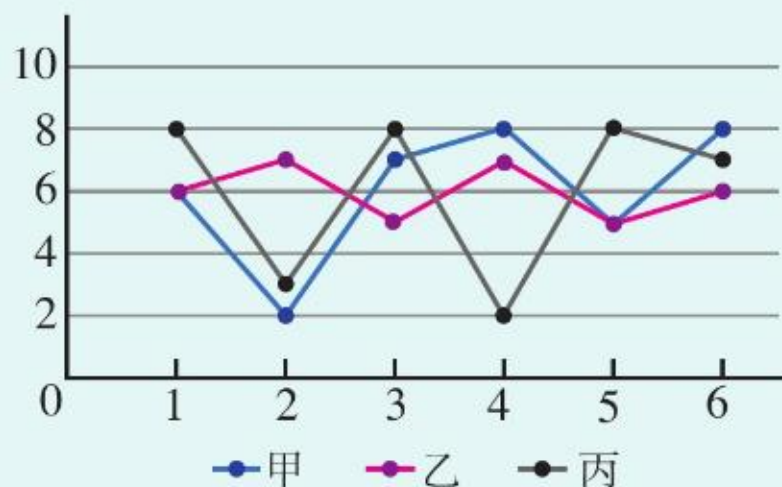
甲	0	1	0	2	2	0	3	1	2	4
乙	2	3	1	1	0	2	1	1	0	1

- (1) 分别计算两组数据的平均数和方差;
(2) 哪台机床的性能比较好?

习题 24.2

复习巩固

1. 甲、乙、丙三组数据的折线图如图所示, 根据图形比较各组数据方差的大小.
2. 甲、乙两台包装机同时包装食盐, 分别从中随机抽出 10 袋, 测得它们的实际质量 (单位: g) 如下表所示.



(第 1 题)

甲	501	506	508	508	497	508	506	508	507	499
乙	505	507	505	498	505	506	505	505	506	506

- (1) 分别计算两组数据的平均数和方差；
- (2) 哪台包装机包装食盐的质量比较稳定？

综合运用

3. 为了考察甲、乙两种小麦的长势，分别从中随机抽取 10 株麦苗，测得苗高（单位：cm）如下表所示.

甲	12	13	14	15	10	16	13	11	15	11
乙	11	16	17	14	13	19	6	8	10	16

- (1) 分别计算两种小麦的平均苗高；
- (2) 哪种小麦的长势比较整齐？
4. 在体操比赛中，往往在所有裁判员给出的分数中，去掉一个最高分和一个最低分，然后计算余下分数的平均分. 6 名裁判员对某一运动员的打分数据（动作完成分）如下：

9.4 8.9 8.8 8.9 8.6 8.7.

- (1) 如果不去掉最高分和最低分，分别求这组数据的平均数（结果保留小数点后一位）和方差（结果保留小数点后两位）；
- (2) 如果去掉一个最高分和一个最低分，分别求这组数据的平均数（结果保留小数点后一位）和方差（结果保留小数点后两位）；
- (3) 你能从方差的角度解释哪种计算平均分的方法更合理吗？

拓展探索

5. 先任意写一组数据（如 2, 3, 5, 6, 9），计算其离差平方和；然后往数据中任意添加一个数据（如 4 或 5），再计算其离差平方和. 添加数据前后这组数据的离差平方和有什么变化？当添加什么数时，离差平方和不会变大？

24.3 数据的四分位数

集中趋势和离散程度都是数据分布某一方面的特征. 为了获取数据更多的信息, 人们还关心数据整体的分布情况. 本节我们将学习用四分位数大致刻画一组数据的分布情况.

问题 某银行有 A 和 B 两个理财产品经营团队. 近三年, 这两个团队分别负责经营 12 项理财产品, 收益率 (单位: %) 如下:

A	4.77	3.98	6.44	4.89	2.15	3.85
	3.64	3.21	3.18	2.02	4.11	4.10
B	3.18	3.84	3.99	3.67	3.40	3.60
	4.10	4.21	4.15	4.44	3.87	3.91

如果你是一位购买理财产品的投资者, 会选择哪个团队的产品?

我们可以用产品收益率的平均数和方差来刻画这两个团队的经营水平. 通过计算, 可以得到 A 和 B 两个团队产品收益率的平均数和方差分别为

$$\bar{x}_A \approx 3.862, s_A^2 \approx 1.327;$$

$$\bar{x}_B \approx 3.863, s_B^2 \approx 0.117.$$

可以看出, 团队 B 的产品收益率的平均数稍大于团队 A, 但差别不大; 团队 A 的产品收益率的方差明显大于团队 B, 即团队 B 的产品收益率的稳定性要好于团队 A. 因此, 如果你是稳健型投资者, 那么应该选择团队 B 经营的理财产品; 如果你是激进型投资者, 那么应该选择团队 A 经营的理财产品.

思考

如果投资者还想进一步了解两个团队理财产品收益率的具体情况, 例如收益率大部分在什么范围, 哪些范围比较集中等信息, 那么产品收益率的平均数和方差能反映出这些信息吗?

平均数和方差虽然可以反映产品收益率的集中趋势和离散程度, 但无法反映出投资客户关心的这些信息. 因此, 我们需要能反映产品收益率更多分布信息的统计量.

一组数据按从小到大的顺序排列，中位数是从中间点把数据分成 2 等份，将数据分成 100 等份的每一分点处的值叫作这组数据的**百分位数**。相比中位数，百分位数可以较全面地反映出数据的分布信息。

由于每个团队的产品收益率的数据个数不多，我们可以用三个特殊的百分位数来刻画。如图 24.3-1 所示，把团队 A 的产品收益率按从小到大的顺序排列，容易得到这组数据的中位数为 3.915，这个值把所有数据分成 2 等份，所有数据中小于这个值的占 50%，称 3.915 为这组数据的**50%分位数**。在 3.915 左侧和右侧的数据中，还可以分别得到它们各自的中位数 3.195 和 4.44，所有数据中小于这两个值的分别占 25%和 75%，称 3.195 和 4.44 分别为这组数据的**25%分位数**和**75%分位数**。由于 3.195，3.915，4.44 这三个值把这组按由小到大顺序排列的数据分成四等份，所以称它们为这组数据的**四分位数** (quartile)，从小到大分别称为这组数据的**第一四分位数**、**第二四分位数** (中位数)、**第三四分位数**，分别记为 Q_1 ， Q_2 ， Q_3 。

第一四分位数又称下四分位数，第三四分位数又称上四分位数。



图 24.3-1

由团队 A 产品收益率的三个四分位数，可以大致看出其产品收益率的分布情况。其产品收益率小于 3.195% 的项目数占总数的 25%，产品收益率小于 3.915% 的项目数占总数的一半，产品收益率大于 4.44% 的项目数占总数的 25%。产品收益率在 3.195% 至 4.44% 之间的项目数占总数的 50%。

类似地，如图 24.3-2，可以得到团队 B 产品收益率的三个四分位数分别为 3.635，3.89，4.125。



图 24.3-2

由团队 B 产品收益率的三个四分位数可以知道，其产品收益率小于

3.635%的项目数占总数的25%，产品收益率小于3.89%的项目数占总数的一半，产品收益率大于4.125%的项目数占总数的25%，产品收益率在3.635%至4.125%之间的项目数占总数的50%。

为了更加直观地观察产品收益率的分布特征，我们可以用产品收益率的三个四分位数及最小值、最大值这五个数值画出**箱线图** (box plot)。团队A产品收益率的箱线图如图24.3-3所示，它主要由矩形箱体和从箱体延伸出的两条水平线段（称为须线）构成。箱线图最左侧和最右侧的竖直线段分别表示这组数据的最小值和最大值，中间箱体的左端竖线表示第一四分位数，箱体中部的竖线表示第二四分位数（中位数），箱体的右端竖线表示第三四分位数，整个箱体的长度为第三四分位数减去第一四分位数的差，称为**四分位距**。由箱线图，容易看出产品收益率分布的大致情况，如分布的范围、中位数的大小、集中的范围、分布是否对称等。

从图24.3-3中你还能看出哪些分布信息？

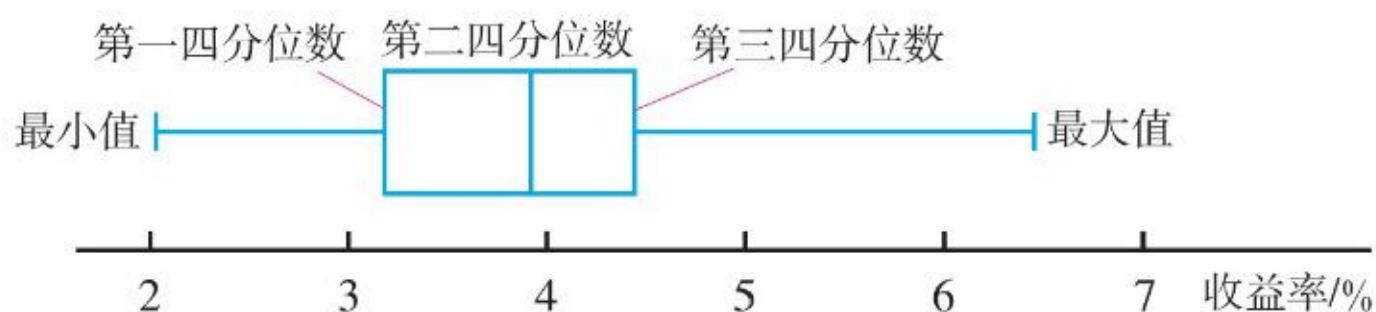


图 24.3-3

类似地，可以画出团队B产品收益率的箱线图，如图24.3-4所示。

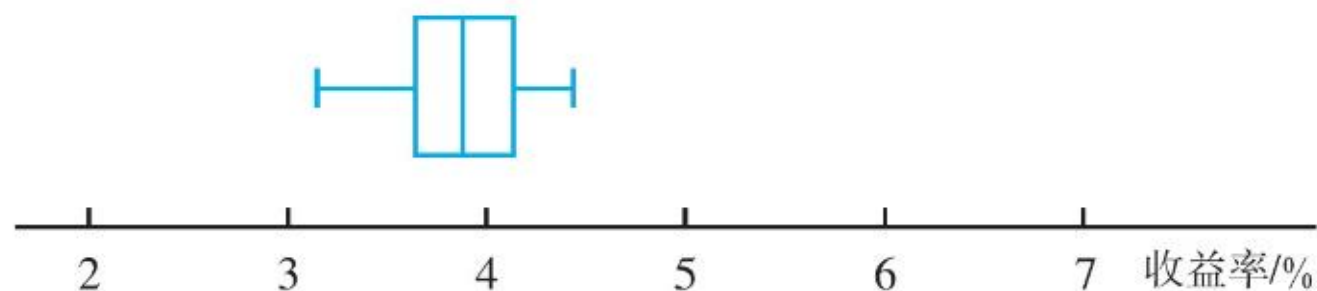


图 24.3-4

箱线图也可以按竖直方向画。为了便于比较两个团队产品收益率的分布特征，把两个箱线图按竖直方向并列画在同一幅图中，如图24.3-5所示。

从图24.3-5中可以发现，两个团队产品收益率的中位数几乎相等（表示中位数的水平线段差不多高），但团队A的产

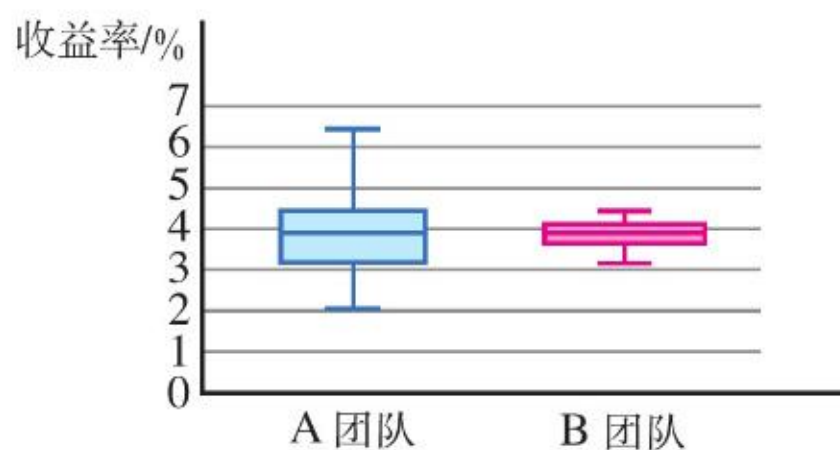


图 24.3-5

品收益率波动明显比团队 B 的大（团队 A 的箱体和须线比团队 B 的长），这与用平均数、方差比较的结果是一致的。从箱线图中，还可以看出分布的一些其他特征，例如，团队 B 的产品收益率分布比团队 A 的更对称（中位数对应的水平线段在箱子的中间位置），团队 A 有约 25% 的产品收益率高于团队 B 的最高产品收益率，也有约 25% 的产品收益率低于团队 B 的最低产品收益率，等等。

与直方图、条形图比较，箱线图在表示数据方面有什么特点？

归纳

按从小到大的顺序排列的一组数据，可以按以下步骤确定其四分位数：先找出这组数据的中位数，作为这组数据的第二四分位数；然后找出中位数左侧和右侧的数据各自的中位数，分别作为这组数据的第一四分位数和第三四分位数。利用一组数据的三个四分位数，以及最小值、最大值可以刻画这组数据的大致分布情况。

例 根据第 173 页表 24.2-5 中的数据，分别计算甲、乙两地气温的四分位数，在同一幅图中画出箱线图，据此比较甲、乙两地的气温特点。

解：将表中两地的气温（单位：℃）分别按从小到大的顺序排列，可得

甲地 9 10 11 12 13 14 16 16 18 21 21 23 24

乙地 11 12 13 14 15 15 16 17 17 18 19 20 21

甲、乙两地气温各有 13 个数据。甲地气温的最小值为 9，最大值为 24，三个四分位数分别为

$$Q_2 = 16, Q_1 = \frac{11+12}{2} = 11.5, Q_3 = \frac{21+21}{2} = 21.$$

乙地气温的最小值为 11，最大值为 21，三个四分位数分别为

$$Q_2 = 16, Q_1 = \frac{13+14}{2} = 13.5, Q_3 = \frac{18+19}{2} = 18.5.$$

在同一幅图中画出两地气温的箱线图，如图 24.3-6 所示。

可以看出，甲、乙两地气温的中位数相同，但甲地气温的波动明显比乙地的大，甲地约有 25% 时刻的气温高于乙地的最高温度，约有 25% 时刻的气温低于乙地的最低温度。

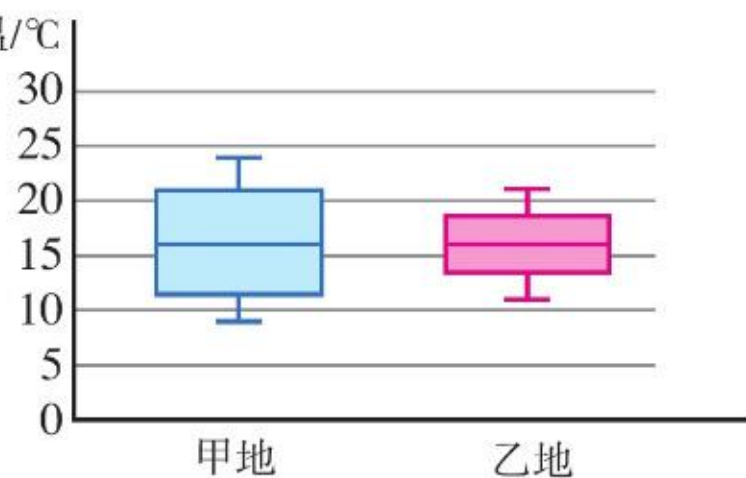
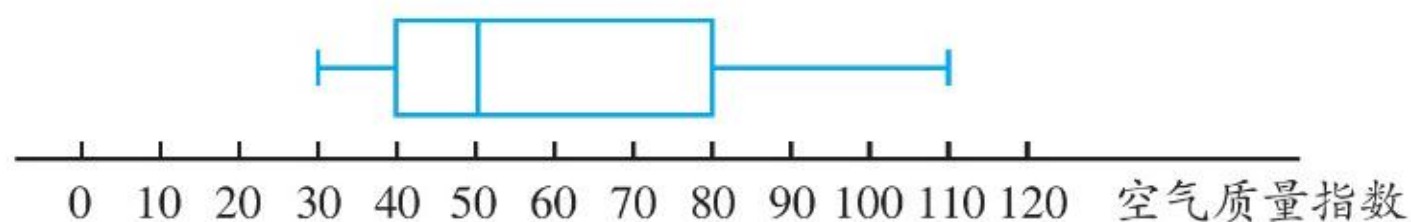


图 24.3-6

练习

1. 某城市 9 月份空气质量指数的箱线图如图所示.



(第 1 题)

- (1) 这个月空气质量指数的最大值、最小值及四分位数分别是多少?
 - (2) 请分析这个月空气质量的特点.
2. 计算第 149 页“问题 1”中每组数据的四分位数, 在同一幅图中画出箱线图, 据此比较两个小组的跳绳成绩特点.
3. 任何一组数据的四分位数, 是否都恰好能把这组数据分成四等份? 举例说明.

习题 24.3

复习巩固

1. 以下是三组数据的直方图和箱线图的示意图, 把表示同一组数据的两个图形进行连线, 并说明理由.



(A)



(B)



(C)



(1)



(2)



(3)

(第 1 题)

2. 一家汽车零售店的 9 名销售人员 10 月份销售的汽车数量 (单位: 辆) 如下:

12 10 3 9 10 12 2 6 14

- (1) 计算汽车销售数量的四分位数;
- (2) 画箱线图并分析汽车销售数量的特点.

综合运用

3. 某班有 40 名同学，一次测试的成绩（百分制）如下：

32 44 54 55 58 62 65 65 68 69 69 69 70 71
71 72 73 74 75 75 75 76 77 77 78 79 80 80
81 83 85 85 87 87 89 90 92 94 99 99

请结合测试成绩的四分位数和箱线图分析这个班这次测试成绩的特点.

4. 八年级两个班男生的身高（单位：cm）分别如下：

甲班 164 171 163 158 167 175 169 181 168 176 175 162
166 165 172 169 171 168 174 170
乙班 172 170 163 161 179 160 176 174 170 178 183 166
168 167 180 171 168 172

请结合男生身高的四分位数和箱线图比较这两个班级男生的身高差异.

24.4 数据的分组

在社会生活中，分类现象普遍存在。例如，超市里各种商品按用途不同分类摆放，宾馆根据硬件设施、服务水平等分成不同的星级，等等。在实际问题中，当面临的对象复杂多样时，分类往往可以为我们处理问题带来方便。对于一组取值多样的数据，对其进行合理分组，也会有助于我们解决问题。

问题 一家公司向社会招聘一名员工，所有应聘者先统一参加笔试，然后根据笔试成绩确定一部分应聘者进入面试。将 10 名应聘者的笔试成绩（百分制）按从小到大的顺序排列如下：

58 64 68 75 76 83 85 89 90 92

你认为哪一部分应聘者应当进入面试？

自然，应当选择笔试成绩好的应聘者进入面试。那么笔试成绩怎样才算好呢？可以有不同的标准。例如，前三名或 85 分及以上等。不管哪种标准，目的都是把笔试成绩分成好和差两组。

对笔试成绩进行分组，上面提到的标准各有其合理性，在实际中也经常被采用。但这些标准都没有考虑数据自身的特点，这可能导致两个很接近的笔试成绩被分到不同的组。例如，83 分与 85 分的差距很小，若以“85 分及以上”为好成绩的标准，则 85 分属于好成绩，而 83 分属于差成绩。而从公司确定面试应聘者的角度看，把笔试成绩相对接近的分到同一组，是一种较合理的做法。因此，笔试成绩可以根据组内差异最小的原则进行分组。

将笔试成绩按从小到大的顺序排列，使相互最接近的笔试成绩都挨在了一起。因此，要使分组后的组内差异最小，只需在已排序数据的基础上寻找分组方法。可以发现，10 个笔试成绩按顺序排列形成 9 个间隔，如图 24.4-1 所示。

58 | 64 | 68 | 75 | 76 | 83 | 85 | 89 | 90 | 92

图 24.4-1

每个间隔都可以把笔试成绩分成好和差两组，共有 9 种分法。

思考

怎么刻画组内笔试成绩差异的大小呢？哪种分法能使笔试成绩好和差两组的组内差异最小？

在前面的学习中，我们知道，离差平方和可以刻画一组数据的离散程度。下面我们利用离差平方和刻画组内数据的离散程度，进而对数据进行分组。

一般地，设有 n 个数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，其平均数记为 $\bar{x}$ ，则离差平方和为

$$d^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2.$$

如果把这组数据分为两组，前 m ($m < n$) 个数据为一组，后 $(n-m)$ 个数据为一组，它们的平均数分别记为 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ ，离差平方和分别为

$$d_1^2 = (x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_1)^2 + \dots + (x_m - \bar{x}_1)^2,$$

$$d_2^2 = (x_{m+1} - \bar{x}_2)^2 + (x_{m+2} - \bar{x}_2)^2 + \dots + (x_n - \bar{x}_2)^2,$$

那么

$$\begin{aligned} d^2 &= (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \\ &= (x_1 - \bar{x}_1 + \bar{x}_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x}_1 + \bar{x}_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_m - \bar{x}_1 + \bar{x}_1 - \bar{x})^2 + \\ &\quad (x_{m+1} - \bar{x}_2 + \bar{x}_2 - \bar{x})^2 + (x_{m+2} - \bar{x}_2 + \bar{x}_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x}_2 + \bar{x}_2 - \bar{x})^2 \\ &= (x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_1)^2 + \dots + (x_m - \bar{x}_1)^2 + (x_{m+1} - \bar{x}_2)^2 + \\ &\quad (x_{m+2} - \bar{x}_2)^2 + \dots + (x_n - \bar{x}_2)^2 + m(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + (n-m)(\bar{x}_2 - \bar{x})^2 \\ &= d_1^2 + d_2^2 + m(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + (n-m)(\bar{x}_2 - \bar{x})^2. \end{aligned}$$

其中 $d_1^2 + d_2^2$ 称为组内离差平方和，表示两个组内数据的离散程度；记

$$d_{12}^2 = m(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + (n-m)(\bar{x}_2 - \bar{x})^2,$$

d_{12}^2 是 m 个第一组数据平均数、 $(n-m)$ 个第二组数据平均数关于总体数据平均数的离差平方和，称为组间离差平方和，表示两个组间的差异。根据组内离差平方和最小的原则进行分组时，由于 d^2 不变，既可以按 $d_1^2 + d_2^2$ 最小来分组，也可以按 d_{12}^2 最大来分组。

这样，根据组内离差平方和最小的原则，能使笔试成绩相差较小的应聘者分在同一组。利用计算器或信息技术工具，可以计算出图 24.4-1 中的 9 种分法的组内离差平方和（结果保留小数点后一位），如表 24.4-1 所示。

表 24.4-1

分组	第一组离差平方和	第二组离差平方和	组内离差平方和
第 1 个间隔	0	799.6	799.6
第 2 个间隔	18	503.5	521.5
第 3 个间隔	50.7	271.4	322.1
第 4 个间隔	152.8	170.8	323.6
第 5 个间隔	228.8	54.8	283.6
第 6 个间隔	411.3	26	437.3
第 7 个间隔	587.4	4.7	592.1
第 8 个间隔	819.5	2	821.5
第 9 个间隔	1 026.2	0	1 026.2

观察最后一列组内离差平方和可以发现，当按第 5 个间隔分组时，组内离差平方和最小．因此，按组内离差平方和最小的分法为

$$\{58, 64, 68, 75, 76\}$$

和

$$\{83, 85, 89, 90, 92\}.$$

例 10 个城市某月的每日最高温度的平均数（简称平均高温）如表 24.4-2 所示.

表 24.4-2

城市	北京	石家庄	呼和浩特	哈尔滨	上海	广州	海口	成都	贵阳	昆明
平均高温/℃	3	3	－3	－11	10	21	22	12	9	17

根据平均高温的组内离差平方和最小的原则，把这 10 个城市分为两组.

解：将表中的数据按从小到大排列，可得

$$-11 \quad -3 \quad 3 \quad 3 \quad 9 \quad 10 \quad 12 \quad 17 \quad 21 \quad 22$$

将它们分成两组共有 9 种情况，利用计算器或信息技术工具，分别计算组内离差平方和（结果保留小数点后一位），如表 24.4-3 所示.

表 24.4-3

分组	第一组离差平方和	第二组离差平方和	组内离差平方和
第 1 个间隔	0	584.2	584.2
第 2 个间隔	32	380.9	412.9
第 3 个间隔	98.7	285.7	384.4
第 4 个间隔	132	158.8	290.8
第 5 个间隔	228.8	113.2	342
第 6 个间隔	308.8	62	370.8
第 7 个间隔	397.4	14	411.4
第 8 个间隔	562	0.5	562.5
第 9 个间隔	789.6	0	789.6

观察最后一列组内离差平方和可以发现, 当按第 4 个间隔分组时, 组内离差平方和最小. 因此, 按组内离差平方和最小的分法为

{北京, 石家庄, 呼和浩特, 哈尔滨}

和

{上海, 广州, 海口, 成都, 贵阳, 昆明}.

结合地理课所学知识, 说一说这样分组合理吗?

练习

- 把表 24.4-2 中 10 个城市的平均高温按组间离差平方和最大进行分组, 应该如何分? 结果和按组内离差平方和最小分组一致吗?
- 某年 5 个城市的人均生活用电量如下表所示.

城市	A	B	C	D	E
人均生活用电量/(kW·h)	910	886	847	812	788

根据人均生活用电量的组内离差平方和最小的原则, 把这 5 个城市分为两组.

习题 24.4

复习巩固

1. 在引体向上测试中, 5 名同学完成的个数分别为 13, 15, 7, 9, 12. 根据组内离差平方和最小原则, 把这 5 名同学引体向上的个数分为两组.

综合运用

2. 某镇 6 家企业去年的产值如下表所示.

企业	A	B	C	D	E	F
产值/亿元	3	12	4	8	9	15

根据年产值的组内离差平方和最小的原则, 把这 6 家企业分为两组.

拓广探索

3. 如果把数据 9, 6, 3, 5, 12 分成三组, 根据组内离差平方和最小的原则, 应该如何分?

阅读与思考

大数据及其应用

传统意义上的数据, 是指进行各种统计、计算、科学研究或技术设计等所依据的数值. 随着社会高速数字化发展, 数据的含义早已远超数值的范围, 一行文字、一张图片、一段视频、一个网络链接, 以及各种类型与格式的文件等, 都是数据.

近年来, 随着互联网、物联网、云计算, 以及智能手机等移动设备的快速发展, 人们创造的数据量也呈现爆炸性增长. 2000 年前后, 一般认为 TB ($1 \text{ TB} = 2^{40} \text{ B}$) 级别的数据量就很大了, 而目前已经可以在 EB ($1 \text{ EB} = 2^{60} \text{ B}$)、ZB ($1 \text{ ZB} = 2^{70} \text{ B}$), 甚至更大的数量级讨论数据了. 我们一般称这种海量数据为“大数据”, 将利用大数据获取有效信息的相关技术称为大数据技术.

1 个汉字所占存储空间为 2 B (字节). 一本《汉字源流精解字典》共有约 207.7 万字, 则 1 TB 的空间大约可以存储 26.47 万本这种字典.

随着数据量的增长,能否快速地处理大数据,成为影响大数据广泛应用的重要因素.例如,面对瞬息万变的气象信息数据、实时变化的股市行情数据等,都需要快速地处理数据.对于应该多快地处理大数据,有人提出“1 s 定律”,只有当数据处理速度在秒级,才能保证使用者对实时生成的大数据进行有效处理,从而获取有效信息,并科学决策.

大数据广泛地应用于各行各业和日常生活中.例如,目前网上购物已经成为我们日常生活的一部分,许多购物平台具有针对顾客进行产品精准推送的功能,这就是在应用大数据.以对某顾客的精准推送为例,运营商可以根据他在购物平台上的基本信息(如注册信息、手机型号等)与用户行为数据(如搜索、浏览、购物等信息),了解他感兴趣的商品与购买力;与



此同时,运营商会根据所有顾客的基本信息与用户行为数据,找到和此顾客具有相似兴趣与购买力的同类顾客;然后,根据同类顾客的常见搜索、浏览、购物等信息,找出符合这类顾客兴趣与购买力的商品推送给此顾客.这样做既可以使顾客快速购买到满意的产品,提升用户体验,又能够提高商品交易量,使商家获利.

我们现在的统计学习也与大数据联系紧密.例如,我们学习的加权平均,正是大数据时代热门算法“分布式计算”的简单形式.“分布式计算”的原理是将一个庞大的计算任务拆分成多个子任务,然后分派给多台计算机共同完成,这能够极大地提高效率、降低成本.此外,我们学习的绘制统计图、数据的分组等内容,也与大数据时代广泛涉及的可视化分析、聚类分析等密切相关.

你还想了解哪些大数据的信息?请查阅资料,并分享给大家吧!

 数学活动

活动1 估计心脏的跳动次数

把全班同学分成若干组，合作完成下面的活动：

1. 各组分别测量本组同学在静息状态下每分钟的脉搏次数，并计算本组数据的平均数、中位数、众数等。
2. 与其他组进行交流，估计心脏在静息状态下每分钟的跳动次数。
3. 查找资料，了解心脏在静息状态下每分钟的跳动次数，并与你们的调查结果进行对比。根据调查结果谈一谈你对平均数、中位数、众数作为数据代表的认识，以及对用样本估计总体的体会。

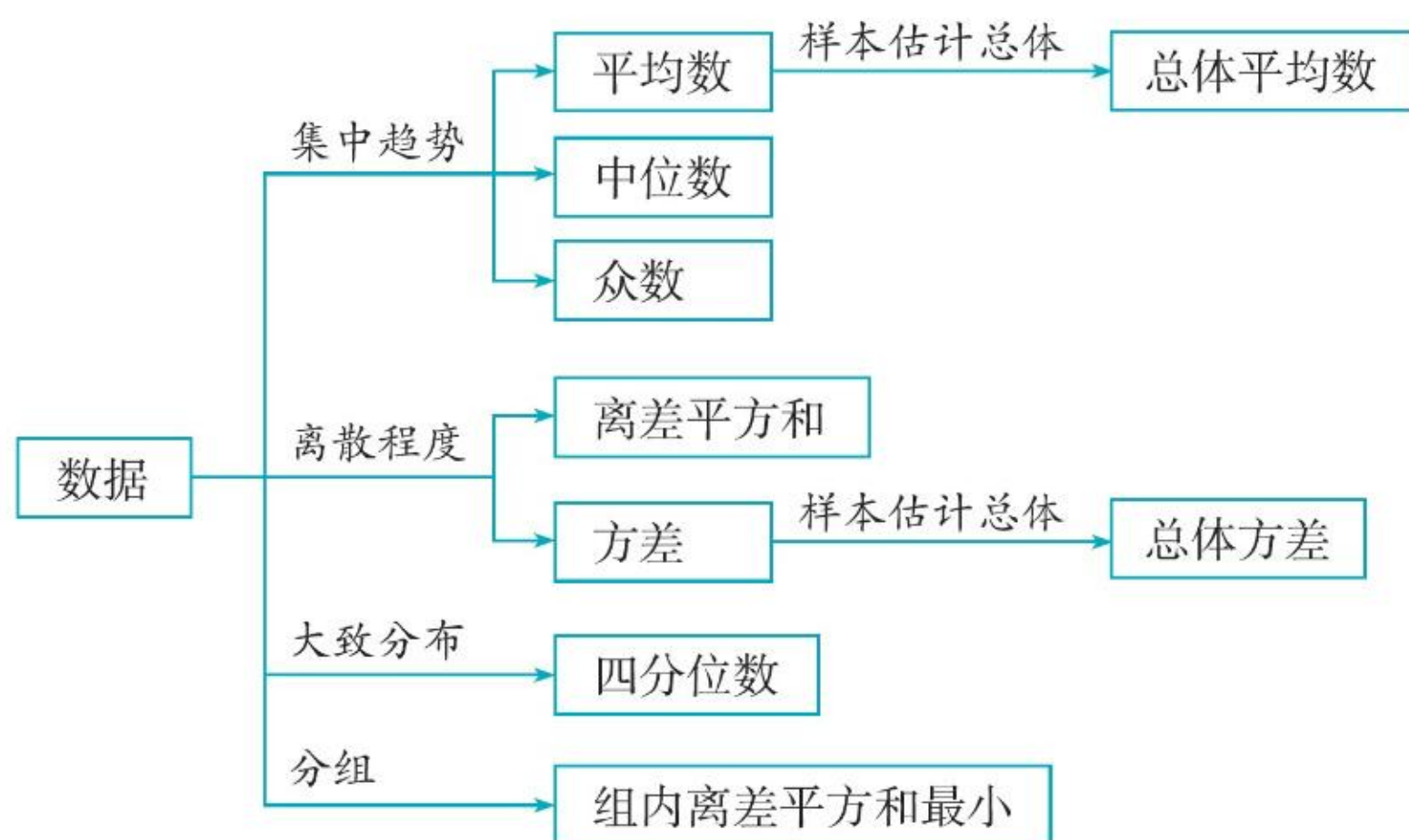
活动2 用水量的均值与方差

把全班同学分成若干组，合作完成下面的活动：

1. 各组收集本组每位同学所在家庭上个月的用水量，并计算本组数据的平均数与方差。
2. 将各组数据汇总，计算全班数据的平均数与方差。
3. 用横轴表示组编号，纵轴表示平均数，描出各组平均数所对应的点，并画一条纵坐标为全班平均数的水平直线。观察点与直线的关系，你有什么发现？
4. 与平均数的表示类似，用统计图表示各组与全班数据的方差。观察点与直线的关系，你有什么发现？
5. 如果把每组数据作为样本，全班数据作为总体，请就用水量数据，谈一谈样本的平均数和方差与总体的平均数和方差的关系，以及抽样调查时应该注意的问题。
6. 全班数据的平均数和方差，能否作为全班同学所在家庭全年月平均用水量的平均数和方差的估计？为什么？

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

从杂乱无章的数据中提取信息，需要对数据进行有效的处理和分析。用表格整理数据和用图形表示数据，有助于我们直观了解数据的特征和规律，并为进一步分析数据提供方向。但要准确把握数据的特征，需要根据特征的不同，用不同的统计量进行刻画。例如，数据的集中趋势可以用平均数、中位数、众数等刻画，数据的离散程度可以用离差平方和、方差等刻画，数据分布的概貌可以用四分位数刻画，等等。即使是刻画数据同一方面特征的统计量，它们也存在不同的特点，在应用中需要根据具体的问题选择合适的统计量进行刻画。按接近程度对数据分组可以有不同的原则，分组原则不同结果可能不同，组内离差平方和最小是常用的分组原则。通过这些内容的学习，有助于我们增强数据观念。

用样本估计总体是统计的基本思想，也是统计的主要目的之一。利用样本的统计量可以估计总体相应的统计量。例如，用样本的平均数和方差可以分别估计总体的平均数和方差，进而了解总体取值的平均水平和离散程度。

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 平均数、中位数、众数在刻画数据的集中趋势上各有什么特点？
2. 平均数与加权平均数有什么联系和区别？举例说明加权平均数中“权”的作用.
3. 离差平方和、方差在刻画数据离散程度上各有什么特点？
4. 为什么四分位数和箱线图可以帮助我们了解数据分布的概貌？
5. 对数据进行分组，除了按组内离差平方和最小分组，你还能想出其他分组的原则吗？
6. 搜集关于“统计学”方面的资料（如学科发展史、思想方法、人物等），自选一个角度谈谈你对统计的认识.



复习题 24

复习巩固

1. 判断下列说法是否正确，若不正确，请举例说明.
 - (1) 一组数据的平均数、中位数、众数一定存在，且都是这组数据中的数；
 - (2) 一组数据的平均数、中位数、众数没有确定的大小关系；
 - (3) 一组数据中，大于平均数和小于平均数的数据各占 50%；
 - (4) 计算加权平均数时，权越大的数据对加权平均数的影响也越大；
 - (5) 比较两组数据的离散程度，离差平方和较大的组，其方差也一定较大.
2. 为了解某一路口的汽车流量，随机调查了 10 天中同一时段通过这个路口的汽车数量（单位：辆），结果如下：

183 209 195 178 204 215 191 208 167 197

在此时段中，平均约有多少辆汽车通过这个路口？

3. 某年 A, B 两座城市四季的平均气温（单位：℃）如下表所示.

城市	春	夏	秋	冬
A	-4	19	9	-10
B	16	30	24	11

- (1) 分别计算 A, B 两座城市四季的平均气温（结果取整数）；

(2) 哪座城市四季的平均气温变化比较小?

4. 一家公司员工的月收入如下表所示.

月收入/元	20 000	18 000	12 000	8 000	6 000	5 000
人数	1	2	4	5	7	6

(1) 计算这家公司员工月收入的平均数、中位数和众数;

(2) 计算这家公司员工月收入的四分位数, 并画出箱线图.

5. 某水库管理人员为了解某种鱼的生长情况, 从水库中随机捕捞了 20 条这种鱼, 称得它们的质量 (单位: kg) 如下:

1.15 1.04 1.11 1.07 1.10 1.32 1.25 1.19 1.15 1.21
1.18 1.14 1.09 1.25 1.21 1.29 1.16 1.24 1.12 1.16

估计水库中这种鱼质量的平均数和方差 (结果保留小数点后两位).

综合运用

6. 某天电影院有三个影厅放映电影, 上午各厅只放映一场电影, 信息如下表所示.

影厅	每张电影票价格/元	座位/个	上座率/%
A	30	60	75
B	40	60	60
C	50	40	47.5

计算电影院的上座率及所售电影票的平均价格.

7. 下表是两种股票一周内的交易日收盘价格 (单位: 元/股).

股票	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
A	11.62	11.51	11.39	11.94	11.17
B	13.53	14.07	13.49	13.84	14.80

计算它们的平均数和方差 (结果保留小数点后两位), 比较这两种股票在这段时间内的涨、跌变化情况.

8. 甲、乙两门大炮在相同条件下向同一目标各发射 50 发炮弹, 炮弹落点情况如下表所示.

炮弹落点与目标的距离/m	40	30	20	10	0
甲炮发射的炮弹数量/发	0	1	3	7	39
乙炮发射的炮弹数量/发	1	3	2	3	41

- (1) 分别计算两门大炮所发射的炮弹落点与目标的距离的平均数;
(2) 哪门大炮射击的准确性较好?

9. 下面是某地区监测的近两年 7 月的空气质量指数.

前年 7 月	71	42	45	58	67	48	51	63	51	73	55	79	52	52	77	54
	87	54	62	55	56	58	60	61	62	65	69	42	72	69	73	
去年 7 月	38	50	19	37	22	47	31	38	22	26	28	19	30	31	32	34
	35	33	18	49	47	37	22	38	38	18	39	25	22	42	44	

- (1) 分别计算两组监测数据的平均数、方差和四分位数 (结果保留小数点后一位);
(2) 画出两组数据的箱线图;
(3) 通过上面的结果, 比较说明这个地区的空气质量情况.

10. 已知 8 个地区居民人均可支配收入 x (单位: 万元) 如下表所示.

地区	1	2	3	4	5	6	7	8
居民人均可支配收入 x /万元	2.2	3.7	4.3	2.7	4.1	2.9	3.3	2.4

根据居民人均可支配收入的组内离差平方和最小的原则, 把这 8 个地区分为两组.

拓广探索

11. 学校八年级 40 名男生的 50 米跑成绩 (单位: s) 如下:

7.1 7.6 7.7 7.6 7.7 7.8 7.7 8.6 8.0 8.9 7.4 8.3 7.3 7.5
7.8 7.9 8.2 7.5 7.2 7.6 7.7 7.9 7.6 7.9 7.2 8.1 8.7 8.0
8.0 8.3 7.4 7.5 7.8 7.9 7.8 7.7 8.1 7.4 7.7 7.9

结合《国家学生体质健康标准 (2014 年修订) 》, 用你所学的统计知识分析数据, 为体育老师写一份数据分析报告.

综合与实践

学生体质健康调查与分析

青少年的体质健康，既与其学习和生活息息相关，又与国家和民族的未来密不可分。为了提升学生的体质健康，进行学生体质健康调查与分析就必不可少。



活动目标

经历收集、整理、描述、分析数据的全过程，提升数据观念；尝试制订一些体质健康测试项目的评价标准；在活动中加强自身体质健康意识。

活动准备

为建立健全国家学生体质健康监测评价机制，激励学生积极参加体育锻炼，2014年教育部印发了《国家学生体质健康标准（2014年修订）》（以下简称《标准》），为我国学生的体质健康监测提出了各种评价标准，初中生体质健康测试项目如表1所示。请查阅资料，了解体质健康测试的有关信息，并根据自身情况填写表1的相关数据。

表1 体质健康测试登记表

姓名		性别		身高/m		体重/kg	
指标			成绩	指标			成绩
体重指数 (BMI) = $\frac{\text{体重}}{\text{身高}^2}/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-2})$				男生 专项	引体向上/次		
肺活量/mL					1 000 米跑/s		
50 米跑/s				女生 专项	1 分钟仰卧起坐/次		
坐位体前屈/cm							
立定跳远/cm					800 米跑/s		

活动任务

活动一 立定跳远成绩的调查与分析

立定跳远是一项集弹跳、爆发力、身体协调性和技术等于一体的体育运

动. 请对你所在学校八年级男生（或女生）的立定跳远成绩进行调查与分析.

任务1 收集数据

(1) 确定样本量

根据你所在学校八年级学生的人数情况, 确定一个合适的样本量.

(2) 确定抽取样本的方法

用简单随机抽样方法抽取样本, 确定具体操作步骤.

(3) 制订方案, 进行调查

根据确定的收集数据的方法, 进行调查, 得到样本数据.

任务2 整理数据

表2是根据《标准》得到的立定跳远等级评价表. 参照表2, 整理样本数据, 得到不同立定跳远等级的频数与百分比.

表2 立定跳远等级评价表

立定跳远等级	男生成绩 x/cm	女生成绩 y/cm
优秀	$x \geq 226$	$y \geq 188$
良好	$210 \leq x < 226$	$174 \leq y < 188$
及格	$170 \leq x < 210$	$144 \leq y < 174$
不及格	$x < 170$	$y < 144$

任务3 描述数据

根据整理的数据, 选择合适的统计图描述样本数据, 使数据分布的信息更直观、清楚地显现出来.

任务4 分析数据

(1) 估计整体情况

根据样本数据以及所作统计图表, 计算样本数据的平均数、中位数、众数、方差、四分位数等, 对全年级男生（或女生）的立定跳远成绩进行估计.

例如, 由调查数据知, 男生样本的立定跳远水平为良好及其以上者48人, 占统计人数的60%, 则可估计全校八年级男生的立定跳远水平有类似结果.

(2) 数据分组

观察调查得到的样本数据, 能否按大小将其分组, 以便对不同立定跳远水平的学生提供针对性帮助? 如果样本数据适合分组, 分几组合适? 如何分组?

活动二 BMI的合理性及其评价标准

人的胖瘦程度与身体健康关系密切, 过胖或过瘦都会对人的健康造成不良

影响,《标准》中用体重指数(BMI)衡量人的胖瘦程度.你对BMI了解吗?用它可以说明人的胖瘦程度吗?

任务1 探究用BMI衡量人体胖瘦程度的合理性

请查阅资料,探究将BMI作为衡量普通人胖瘦程度的常用指标的合理性.

任务2 制订你所在班级的BMI等级评价标准

基于我国学生的整体情况,《标准》给出了八年级学生的BMI等级评价标准,如表3所示.根据你所在班级同学的BMI数据,尝试制订一个专属于你所在班级的BMI等级评价标准.

表3 《标准》中的八年级学生BMI等级评价标准

性别	等级			
	低体重	正常	超重	肥胖
男	≤ 15.6	15.7~22.5	22.6~25.2	≥ 25.3
女	≤ 15.2	15.3~22.2	22.3~24.8	≥ 24.9

任务3 分析标准的差异性

对比你所制订的标准与表3中的标准,两者是否有差异?如果有,分析可能造成这种差异的原因.

活动三 肺活量与长跑成绩的关系

在对中学生的体质健康测试中,男生1 000米跑和女生800米跑是衡量学生能量代谢系统与运动能力的综合性运动.有人说“肺活量大的人长跑能力强”,你在现实生活中有类似感受吗?如何用数学的眼光看待这个现象?

任务1 问题提出

“肺活量大的人长跑能力强”这句话对八年级学生适用吗?提出可以通过数据分析解答的研究问题.

任务2 问题解决

通过小组合作的方式,设计整个研究过程,经历收集、整理、描述、分析数据的过程,得出研究结论.

活动四 开展其他活动(选做)

在完成上述活动的基础上,你还可以继续利用体质健康测试的数据进行其他研究.研究问题可以从下列三个方面选择,也可以根据自身兴趣,小组协商

确定.

- (1) 男生 1 000 米跑成绩的调查;
- (2) 女生的 BMI 与其仰卧起坐成绩的关系;
- (3) 制订你所在班级学生坐位体前屈成绩的评价标准.

活动过程

1. 组建合作团队

本次综合与实践活动需要团队协作. 在班级中组成 5~8 人一组的研究小组, 每位同学参加其中一个小组, 每个小组确定一名负责人.

2. 方案构思

小组成员进行充分的讨论与交流, 集思广益, 形成解决上述任务的方案.

3. 方案实施

按照小组设计的方案进行任务分工, 使每位成员都有明确的任务. 根据规划的研究步骤实施, 完成活动任务, 形成研究报告.

4. 展示交流

制作向全班汇报的演示文稿, 选出代表向全班同学展示本组的研究成果, 分享实践过程中的活动经验、遇到的困难及其解决方法, 反思活动中的不足.

活动评价

通过成果展示与交流, 基于完成的研究报告, 根据情况选择任务完成表、表现评分表、自我反思表等进行评价. 与老师和全班同学一起, 通过质疑、辩论、评价, 总结成果, 分享体会, 分析不足, 开展自我评价、同学评价和教师评价, 完成本次综合与实践活动.

后 记

本套教科书（七～九年级）由人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心依据教育部《义务教育数学课程标准（2022年版）》编写。

本套教科书集中反映了基础教育课程改革的最新成果，总结了上一版《义务教育教科书 数学》的编写经验，凝聚了教育专家、学科专家、教材编写人员、教研人员及一线教师的集体智慧。参加本套教科书统稿的还有薛彬、王光明，参加本册教科书统稿的还有秦德生，参加本册教科书编写讨论的还有李健、张飞玲、王嵘。本套教科书封面设计由中央美术学院设计团队完成，人民教育出版社设计部制作。本册教科书版式设计为王俊宏，内文插图绘制为王俊宏、张婷婷、康鲁雷。我们感谢所有对教科书的编写、审读、试教、出版等提供过帮助与支持的同仁和社会各界朋友。

本册教科书出版之前，我们通过多种渠道与教科书选用作品的作者进行了联系，得到了他们的大力支持。中国载人航天工程办公室、视觉中国、IC photo、雅昌文化（集团）有限公司和李文林等为本册教科书提供了图片素材。对此，我们表示衷心的感谢！

我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本册教科书的过程中提出宝贵的意见和建议。我们将本着精益求精的态度，集思广益，不断修订，努力使教科书日趋完善。

联系方式

电 话：010-58758335，58758866

电子邮箱：jcfk@pep.com.cn

意见反馈平台：jcyjfk.pep.com.cn

人民教育出版社 课程教材研究所



义务教育教科书

数学

八年级

下册

YIWU JIAOYU JIAOKESHU

SHUXUE



绿色印刷产品

ISBN 978-7-107-38923-8

